©2003г. А.С. Величко, Е.А. Нурминский, д–р физ.–мат. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

Прямо–двойственная декомпозиция задачи о репликации портфеля рыночных активов

Аннотация

Рассматривается проблема репликации портфеля рыночных активов с учетом критерия условного среднего значения потерь. С ограничением рисков в терминах условных средних потерь сформулированная задача рассматривается как структурированная экстремальная проблема со связывающими переменными и двумя группами ограничений. При большом количестве активов и продолжительных горизонтах планирования становится целесообразным применение специальных методов, использующих алгоритм прямо-двойственной декомпозиции. Приведены результаты численных экспериментов.

1 Введение

Операции на финансовом (фондовом) рынке представляют собой размещение свободных денежных средств с целью получения дохода путем покупки-продажи рыночных активов. Эти активы обладают различными показателями доходности, определяемой долгосрочным трендом поведения рыночной цены, а также различной степенью ее волатильности. Изменчивость и непредсказуемость будущих цен создает для портфельных инвесторов определенный риск, которым необходимо разумно управлять. Традиционными мерами риска являются дисперсия портфеля [1] и квантильный критерий *VaR (Value-at-Risk)*. В последнее время в качестве меры риска расширяется и использование критерия условных средних потерь *CVaR (Conditional Value-at-Risk)*. Управление рисками характерно не только для финансовых моделей, в частности, квантильный критерий помимо инвестиционных задач [2] используется в двухэтапном стохастическом программировании [3], аэрокосмических приложениях [4].

Применительно к задачам инвестирования основным понятием является портфель инвестора, который можно описать вектором $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, i-ая компонента которого соответствует количеству единиц актива i в портфеле инвестора, $i = 1, \ldots, n$. Стохастическая компонента модели заключается в векторе y рыночных цен активов, являющегося случайной величиной из множества $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, на котором задана вероятностная мера $\mathcal{P}$. Экономические потери инвестора описываются функцией $f(x, y)$, определяющей потери при использовании выбранного портфеля x и наблюдаемой реализации котировок $y \in Y$.

Определим функцию распределения потерь $\Psi(x,\xi) \overset{\triangle}{=} \mathcal{P}\{y | f(x,y) \leq \xi\}$ для заданной функции потерь $f(x,y)$ и вероятностной меры $\mathcal{P}$. Тогда по определению квантильный критерий потерь представляет собой

$$VaR_\alpha(x) \overset{\triangle}{=} \min\{\xi | \Psi(x,\xi) \geq \alpha\},$$

где $\alpha \in (0,1)$ – заданный уровень вероятности.

В то время как величина *VaR* для заданной вероятности α и выбранном портфеле x определяется как минимальное значение потерь ξ, при которых вероятность того, что потери не превосходят ξ, превышает α, значение условных средних потерь *CVaR* определяется как условное среднее величины потерь, превышающих *VaR*, то есть

$$CVaR_\alpha(x) \overset{\triangle}{=} \mathsf{M}\{f(x,y) | f(x,y) > VaR_\alpha(x)\}.$$

Сформулируем утверждения, играющие важную роль при использовании критерия *CVaR*, доказательства которых можно найти в [5].

Теорема 1 *Для* $\xi \in \mathbb{R}$ *определим скалярную функцию*

$$F_\alpha(x,\xi) \overset{\triangle}{=} \xi + \frac{1}{(1-\alpha)} \mathsf{M}[f(x,y) - \xi]^+, \tag{1}$$

$[t]^+ \overset{\triangle}{=} \max\{0,t\}$. *Тогда* $CVaR_\alpha(x) = \min\limits_\xi F_\alpha(x,\xi)$.

Достаточно широкий класс задач финансовой математики представлен выпуклыми по x функциями потерь $f(x,y)$. Важным свойством критерия *CVaR* является выпуклость функции $CVaR_\alpha(x)$ по x и выпуклость функции $F_\alpha(x,\xi)$, определенной в (1), по совокупности $(x,\xi) \in X \times \mathbb{R}$ для выпуклых по x функций потерь $f(x,y)$. В этом случае задача минимизации условного среднего потерь $CVaR_\alpha(x)$ по x эквивалентна минимизации функции $F_\alpha(x,\xi)$ на $(x,\xi) \in X \times \mathbb{R}$.

Для практических задач, использующих ограничение на уровень допустимого риска в понимании условных средних потерь *CVaR*, важна следующая теорема [5].

Теорема 2 *Пусть* $g(x)$ *– скалярная функция, определенная для* $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $F_\alpha(x,\xi)$ *– скалярная функция (1) для* $\xi \in \mathbb{R}$. *Тогда для заданного уровня вероятности* $\alpha \in (0,1)$ *и уровня допустимых потерь* $\omega \in \mathbb{R}$ *задача*

$$\min_{x \in X} g(x) \text{ при условии } CVaR_\alpha(x) \leq \omega$$

эквивалентна задаче

$$\min_{x \in X, \xi \in \mathbb{R}} g(x) \text{ при условии } F_\alpha(x,\xi) \leq \omega.$$

Более подробно ознакомиться со свойствами критериев *VaR*, *CVaR* и их приложениями к задачам финансовой математики можно в работах [5, 6].

2 Репликация портфеля

Задача о репликации портфеля рыночных активов (см., например [5, 7]) возникает при желании инвестора зафиксировать *ex ante* структуру портфеля рыночных активов на некоторый горизонт планирования, так чтобы стоимость портфеля в конечный момент при известных будущих ценах этих активов была равна заданной. При этом инвестор минимизирует свои потери, под которыми понимается мера отклонения рыночной стоимости его портфеля от стоимости эталонного портфеля, состоящего только из актива-эталона. В качестве дополнительного условия может присутствовать желание инвестора ограничить сверху риск как какую либо меру, рассмотренную ранее. В настоящей работе в качестве такой меры используется условная средняя величина возможных потерь, соответствующая критерию *CVaR*.

Пусть известна динамика цен I_t актива-эталона, и инвестор располагает возможностью купить активы S_j, динамика их цен описывается набором временных рядов p_{tj}, где $t = 1, \dots, T, j = 1, \dots, n$. Обозначим за ν запланированную стоимость портфеля в конечный момент времени T. Тогда $\theta = \nu/I_T$ – количество единиц актива-эталона в эталонном портфеле, состоящем только из этого актива, имеющего в момент T стоимость ν. Величины θI_t описывают динамику стоимости такого портфеля в промежуточные моменты времени $t = 1, \dots, T$. Пусть x_j – количество единиц актива S_j в портфеле инвестора, зафиксированное инвестором на период $[1, T]$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{tj}x_j$ – стоимость портфеля рыночных активов в момент времени t. В качестве величины потерь в момент времени t инвестор рассматривает величину $f_t(x, p) = (\theta I_t - \sum\limits_{j=1}^{n} p_{tj}x_j)/\theta I_t$, представляющую собой относительное отклонение стоимости портфеля рыночных активов в момент времени t от стоимости портфеля, состоящего только из актива-эталона, в этот же момент времени. Эта задача отражает стремление инвестора обучиться на интервале $[1, T]$ с тем, чтобы использовать в будущем полученный оптимальный портфель заданной стоимости ν с минимальным риском.

Векторы $p_1, p_2, \dots, p_T$ – прошлые цены, которые можно рассматривать как выборку из некоторой генеральной совокупности. Максимально используя эту информацию при отсутствии каких либо гипотез о характере случайных процессов можно построить лишь эмпирическую функцию распределения и приближенно записать (1) в виде

$$F_\alpha(x,\xi) = \xi + \frac{1}{(1-\alpha)}\tilde{\mathsf{M}}[f(x,p_t)-\xi]^+,$$

где $\tilde{\mathsf{M}}$ – математическое ожидание относительно эмпирической функции распределения.

В предположении стационарности и статистической независимости векторов цен эмпирическая функция распределения будет сосредоточена на атомах $\{p_1, p_2, \dots, p_T\}$ с одинаковыми весами $1/T$. При этом

$$\tilde{\mathsf{M}}[f(x,p_t)-\xi]^+ = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[f(x,p_t)-\xi]^+.$$

Тогда

$$F_\alpha(x,\xi) = \xi + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{t=1}^{T}[[(\theta I_t - \sum_{j=1}^{n} p_{tj}x_j)/\theta I_t] - \xi]^+.$$

Задача инвестора – выбрать такой портфель активов x_j, чтобы

- среднее абсолютных значений потерь $g(x) = (1/T)\sum\limits_{t=1}^{T}|f_t(x,p)|$ было минимальным,
- стоимость портфеля в конечный момент времени была равна ν,
- условное среднее значение потерь в смысле критерия *CVaR* для заданного уровня вероятности α не превышало бы заданной величины ω.

Из теоремы 2 условие $CVaR_\alpha(x) \le \omega$ в задаче минимизации функции $g(x)$ может быть заменено на ограничение $F_\alpha(x,\xi) \le \omega$ в задаче минимизации $g(x)$ по совокупности переменных x и ξ.

Таким образом задача инвестора – минимизировать по переменным x, ξ функционал

$$g(x) = (1/T)\sum_{t=1}^{T}|(\theta I_t - \sum_{j=1}^{n} p_{tj}x_j)/\theta I_t| \tag{2}$$

на ограничениях

$$\xi + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{t=1}^{T}[[(\theta I_t - \sum_{j=1}^{n} p_{tj}x_j)/\theta I_t] - \xi]^+ \le \omega, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{Tj}x_j = \nu, x_j \ge 0. \tag{4}$$

Положим в дальнейшем $\beta = 1/[(1-\alpha)T]$. Введением новых переменных

$$\eta_t = |(\theta I_t - \sum_{j=1}^{n} p_{tj}x_j)/\theta I_t| \ge 0, s_t = [[(\theta I_t - \sum_{j=1}^{n} p_{tj}x_j)/\theta I_t] - \xi]^+ \ge 0$$

задача (2)-(4) сводится к задаче линейного программирования:

$$\min_{x_j,\xi,\eta_t,s_t} (1/T)\sum_{t=1}^{T}\eta_t \tag{5}$$

$$\eta_t \geq (\theta I_t - \sum_{j=1}^{n} p_{tj}x_j)/\theta I_t \geq -\eta_t, \tag{6}$$

$$[(\theta I_t - \sum_{j=1}^{n} p_{tj}x_j)/\theta I_t] - \xi - s_t \leq 0, \tag{7}$$

$$\xi + \beta\sum_{t=1}^{T} s_t \leq \omega, \sum_{j=1}^{n} p_{Tj}x_j = \nu \tag{8}$$

с условиями неотрицательности переменных x_j, η_t, s_t.

Задача (5)-(8) содержит $3T+2$ ограничений и $2T+n+1$ переменных. На развитом финансовом рынке инвестор сталкивается с возможностью вложения свободных денежных средств в активы, число которых может измеряться десятками, при этом рыночные цены этих активов изменяются ежеминутно. Большая размерность возникающей задачи линейного программирования заставляет использовать методы более экономные по использованию памяти ЭВМ и времени выполнения.

3 Декомпозиция задачи репликации портфеля рыночных активов

Схемы декомпозиции позволяют свести задачу (5)-(8) к последовательности задач меньшей размерности. Эти задачи модифицируются, и между ними осуществляется обмен промежуточными результатами. Такие схемы разрабатываются с начала 60-х годов XX века [8]. Концепция параллельных вычислений позволила по-новому подойти к используемым методам декомпозиции.

В работе [9] был предложен алгоритм прямо-двойственных отсечений, позволяющий осуществить эффективную декомпозицию двублочной задачи линейного программирования с относительно небольшим числом связывающих переменных. В работе [10] описана модификация этого подхода, расширившая класс задач линейного программирования, решаемых этим алгоритмом. Алгоритм прямо-двойственных отсечений может быть интерпретирован как применение алгоритма Данцига-Вулфа одновременно к прямой и двойственной задачам, в каждой из которых оптимизируемый функционал аппроксимируется с помощью линейных отсечений, вычисляемых по ходу выполнения алгоритма. Прямая и двойственная задачи модифицируются с учетом новых отсечений, и между ними организуется обмен решениями для уточнения решения исходной задачи. Данный алгоритм допускает параллельное решение прямой и двойственной задачи.

В качестве базовой структурированной оптимизационной задачи рассмотрим двублочную проблему следующего вида:

$$\min_{z_A, z_B, x} \quad c_A z_A + c_B z_B \tag{9}$$

$$A_A z_A \qquad + B_A x \leq d_A, \tag{10}$$

$$A_B z_B \quad + B_B x \leq d_B, \tag{11}$$

$$z_A \geq 0, \; z_B \geq 0, \; x \geq 0. \tag{12}$$

При фиксированном x эта задача распадается на два независимых блока, что в основном и использует алгоритм прямо-двойственных отсечений. Переменные x называют связывающими, поскольку они входят во все ограничения задачи, а z_A, z_B – внутренними переменными.

Покажем, что задача (5)-(8) представима в виде (9)-(12). Поскольку переменная ξ произвольна по знаку, представим ее эквивалентным образом в виде $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \geq 0$. Переменные η_t составляют блок переменных z_A, а переменные ξ_1, ξ_2, s_t – блок переменных z_B длиной $T + 2$. Обозначим за P матрицу $T \times n$, состоящую из элементов $p_{tj}/(\theta I_t)$, e – единичный вектор, E – единичная матрица.

Получим двублочное представление задачи (5)-(8) в форме (9)-(12):

$$\min\{(\underbrace{1/T, \ldots, 1/T}_{T})\eta_t + (\underbrace{0, \ldots, 0}_{T+2})(\xi_1, \xi_2, s_t')'\} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} -E \\ -E \end{pmatrix} \eta_t + \begin{pmatrix} -P \\ P \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -e \\ e \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} e & -e & E \\ 1 & -1 & \beta \ldots \beta \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix} (\xi_1, \xi_2, s_t')' + \begin{pmatrix} & P & \\ 0 & \ldots & 0 \\ p_{T1} & \ldots & p_{Tn} \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} e \\ \omega \\ \nu \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\eta_t, \xi_1, \xi_2, s_t, x \geq 0. \tag{16}$$

В двублочной задаче общего вида (9)-(12) определим функции

$$f_A(x) \triangleq \begin{array}{c} \min\limits_{z_A} c_A z_A, \\ A_A z_A \leq d_A - B_A x \\ z_A \geq 0 \end{array} \qquad f_B(x) \triangleq \begin{array}{c} \min\limits_{z_B} c_B z_B, \\ A_A z_B \leq d_B - B_B x \\ z_B \geq 0 \end{array} \tag{17}$$

тогда (9)-(12) эквивалентным образом представима в виде

$$\min_x \{f_A(x) + f_B(x)\}. \tag{18}$$

Функции $f_A(x)$ и $f_B(x)$ – выпуклые и кусочно-линейные. Определяя функции $h_A(p)$ и $h_B(p)$ как сопряженные для $f_A(x)$ и $f_B(x)$ соответственно по формулам

$$h_A(p) \triangleq f_A^*(x) = \max_x \{px - f_A(x)\},\ h_B(p) \triangleq f_B^*(x) = \max_x \{px - f_B(x)\},$$

задачу (18) можно эквивалентно представить в терминах сопряженных функций:

$$\min_p \{h_A(-p) + h_B(p)\}. \tag{19}$$

Такая эквивалентность задач (18) и (19) позволяет организовать эффективный процесс обмена координирующей информацией между прямыми и двойственными задачами линейного программирования в прямо-двойственном декомпозиционном подходе к решению задачи (9)-(12).

Суть этого подхода заключается в замене функции $f_B(x)$ в (18) и $h_A(p)$ в (19) на их внешние кусочно-линейные аппроксимации, получаемые в процессе решения подзадач и обмена прямо-двойственной информацией. В результате решения аппроксимированных вариантов задач (18), (19) находятся значения функций $f_B(x), h_A(p)$ и их субградиенты. Это дает новые линейные отсечения, добавляемые соответственно в прямую и двойственную задачу, которые уточняют кусочно-линейные аппроксимации $f_B(x)$ и $h_A(p)$. Более подробно вычислительные аспекты алгоритма прямо-двойственных отсечений описаны в работах [9, 10].

4 Численные эксперименты

Для численных расчетов использовались данные о динамике цен акций 10 активов (AA, GE, JNJ, MSFT, AXP, GM, JPM, PG, BA, HD) из 30 активов, входящих в индекс Dow Jones Industrial (DJI), за период с 3 февраля по 14 апреля 2003 года (всего 61 котировка по каждому активу), которые доступны на http://finance.yahoo.com. В качестве цен рыночных активов, входящих в портфель, использовались цены по закрытию торгов, в качестве эталонного актива рассматривался сам индекс DJI за указанный период.

Во всех экспериментах терминальная стоимость портфеля ν выбиралась равной 1000, уровень вероятности α для определения *CVaR* был равен 0.9. Задача репликации портфеля решалась как с помощью модифицированного алгоритма прямо-двойственных отсечений [10], применяемого к структурированной форме задачи (13)-(16), так и с помощью симплекс-метода, применяемого к задаче (13)-(16) без разделения на блоки.

Для численных расчетов использовалась двухпроцессорная ЭВМ на базе PentiumIII, 800MHz. Сначала количество периодов времени T выбиралось равным 50 и использовалось 50 первых котировок указанных 10 активов и эталона, начиная с 3 марта 2003 года, допустимый уровень потерь ω был равен 0.8. При этом оптимальный вектор x^* количества активов, включаемых в портфель, равен (1.11, 5.15, 0, 4.58, 4.82, 0.28, 0, 2.49, 2.79, 8.03). Ограничение $CVaR_\alpha(x) \leq \omega$ на допустимый уровень *CVaR* в этом случае оказалось неактивным, поскольку значение $CVaR_{0.9}(x^*) = 0.009925$. На рисунке 1 приведена динамика стоимости портфеля x^*, то есть величины $\sum\limits_{j=1}^{10} p_{tj} x_j^*$ для $t = 1, \ldots, 50$ (пунктирная линия), и величин θI_t, отражающих динамику эталонного портфеля (жирная линия).

В дальнейшем было проведено еще 7 экспериментов, в которых изменялось значение T, для $\omega = 0.8$. Основные характеристики экспериментов приведены в таблице 1. m – количество ограничений задачи (13)-(16), $Na + Nb$ – общее количество внутренних переменных в блоках z_A и z_B, $k^{\max}$ – число прямых и двойственных задач, решаемых алгоритмом прямо-двойственных отсечений, МАДО – время выполнения алгоритма прямо-двойственных отсечений в секундах, СМ – время выполнения симплекс-метода в секундах в задаче без разделения на блоки, МАДО/СМ – отношение времени выполнения алгоритма прямо-двойственных отсечений и симплекс-метода.

При росте горизонта планирования T, определяющего размерность задачи, наблюдается рост выигрыша в использовании декомпозиции задачи по сравнению с решением задачи без использования информации о специальной структуре ограничений. Абсолютные значения времени выполнения машинного кода не представляют большого интереса, важен относительный выигрыш прямо-двойственного алгоритма по сравнению с решением задачи симплекс-методом без использования информации о специальной структуре ограничений. При использовании оптимизационых пакетов промышленного назначения (MINOS, CPLEX) абсолютные значения времени исполнения могут существенно отличаться от приведенных, однако есть основания, что этот относительный выигрыш прямо-двойственного алгоритма сохранится.

На рисунке 2 показана зависимость времени решения задачи (13)-(16) алгоритмом прямо-двойственных отсечений (жирная линия) и симплекс-методом (пунктирная линия) от количества ограничений m в тестах 1-8, характеризующего размерность решаемой задачи. Масштаб шкалы логарифмический по обеим осям. Близкие к линейным оценки позволяют надеяться на полиномиальную оценку вычислительной сложности метода прямо-двойственных отсечений. Показатель степени такой полиномиальной оценки в проведенных тестах оказался равным 3,39, вместе с тем фактическая вычислительная сложность симплекс-метода, применяемого в постановке задачи без выделения блоков, в этих тестах пропорциональна $m^{3,77}$. При m порядка 1000 это обеспечивает примерно 14-кратное ускорение счета.

5 Заключение

В работе рассматривается проблема репликации портфеля рыночных активов с учетом критерия условного среднего значения потерь *CVaR*. Данная проблема сводится к задаче линейного программирования, в которой минимизируется среднее из абсолютных значений относительных отклонений во времени стоимости портфеля рыночных активов от стоимости эталонного портфеля. Для решения данной задачи используется метод прямо-двойственной декомпозиции [9, 10]. Численные эксперименты демонстрируют уменьшение вычислительных затрат при использовании метода прямо-двойственных отсечений по сравнению со стандартным симплекс-методом.

Список литературы

[1] *Markowitz H.M.* Portfolio Selection // J. Finances. 1952. No.7(1). P.77 – 91.

[2] *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Оптимальное управление портфелем ценных бумаг.// АиТ. 2001. No.9. С.101 – 113.

[3] *Кибзун А.И., Никулин И.В.* Дискретная аппроксимация линейной двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.// АиТ. 2001. No.8. С.127 – 137.

[4] *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию.// АиТ. 2001. No.5. С.77 – 88.

[5] *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // Journal of Banking & Finance. 2002. No.26. P.1443 – 1471.

[6] *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Optimization of conditional value-at-risk // Journal of Risk. 2000. No.2. P.21 – 41.

[7] *Dembo R.S., Rosen D.* The practice of portfolio replication: a practical overview of forward and inverse problem // Annals of Operations Research. 1999. No.85 P.267 – 284.

[8] *Лэсдон Л.С.* Оптимизация больших систем.—М.: Мир. 1975.

[9] *Нурминский Е.А.* Численные методы выпуклой оптимизации.— М.: Наука. 1991.

[10] *Величко А.С., Нурминский Е.А.* Опыт декомпозиции метода конечных элементов с использованием теории структурированных оптимизационных задач.// Исследовано в России. 2002. С.1237 – 1256.

Тест	T	m	$Na + Nb$	ω	$CVaR_{0.9}(x^*)$	$k^{\max}$	МАДО	СМ	МАДО/СМ
1	17	53	36	0.8	0.004616	2	4.55	4.33	1.05
2	21	65	44	0.8	0.003645	1	7.78	10.23	0.76
3	25	77	52	0.8	0.005778	2	16.00	18.95	0.84
4	30	92	62	0.8	0.003240	1	25.93	41.78	0.62
5	35	107	72	0.8	0.006348	2	44.19	62.05	0.71
6	40	122	82	0.8	0.003890	2	76.88	106.36	0.72
7	50	152	102	0.8	0.009925	2	153.17	245.23	0.62
8	60	182	122	0.8	0.007874	2	279.17	470.24	0.59

Таблица 1: Статистика тестовых примеров.

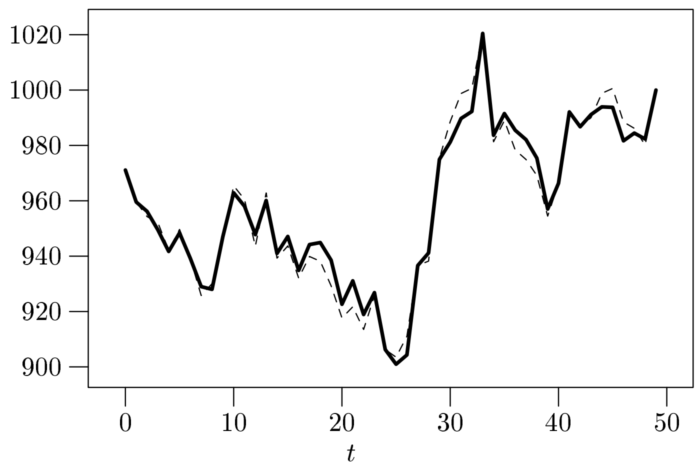

Рис. 1: Динамика стоимости оптимального портфеля инвестора x^* для теста 7 (пунктирная линия) и эталонного портфеля (жирная линия).

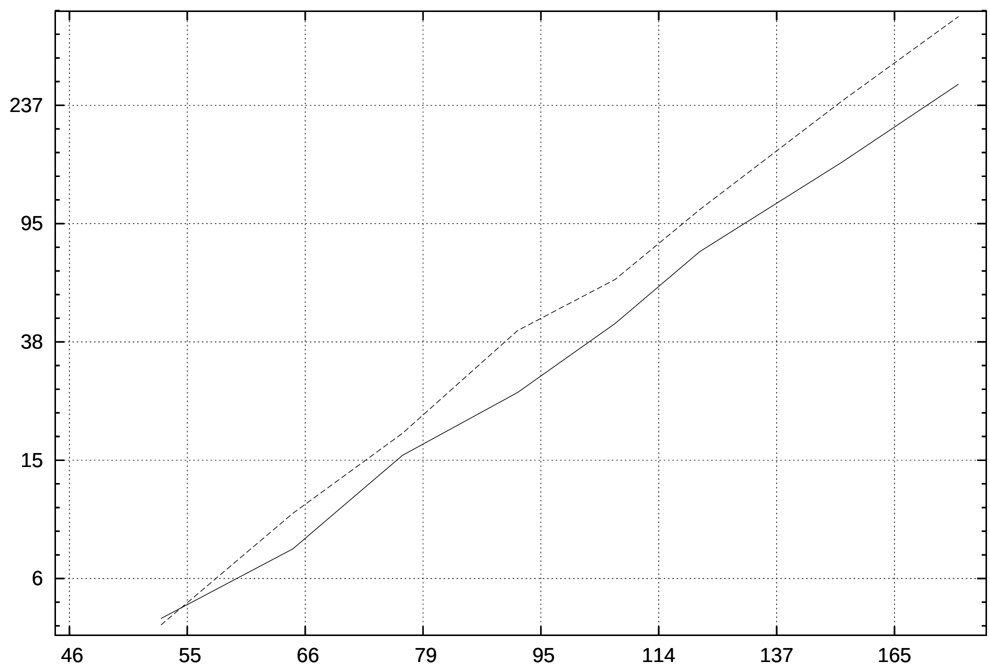

Рис. 2: Время решения тестовых задач в зависимости от количества ограничений (m) алгоритмом прямо-двойственных отсечений (жирная линия) и симплекс-методом (пунктирная линия). Масштаб логарифмический по обеим осям.