Российская Академия Наук
Дальневосточное отделение
Институт прикладной математики

Динамика курсов бескупонных облигаций в обобщенной модели Васичека

Нурминский Е.А., Величко А.С.

Владивосток
1998

УДК 519.866.2:336.763.3

Нурминский Е.А, Величко А.С. Динамика курсов бескупонных облигаций в обобщенной модели Васичека. Владивосток: Дальнаука, 1998, 24 с. (Препринт/Институт прикладной математики ДВО РАН)

Представлены обобщение классической модели динамики курсов облигаций Васичека (Vasicek) и результаты ее практического применения на примере рынка государственных краткосрочных обязательств (ГКО) 1995-1997 гг.

UDK 519.866.2:336.763.3

Nurminski E.A., Velichko A.S. Pricing zero-coupon bonds in a generalized Vasicek model. Vladivostok: Dal'nauka, 1998, 24 p. (Preprint/Institute of Applied Mathematics FEB RAS)

The foundations of the theory of pricing zero-coupon bonds are given. The modification of Vasicek model for the stohastic dynamics of the rate of return is used to fit the data on the term structure of GKO bonds in 1995-1997.

Аннотация

Данная работа посвящена моделированию поведения курсов бескупонных облигаций на вторичном фондовом рынке. Курс облигации с заданным периодом обращения на рынке рассматривается как случайный процесс, зависящий от случайного процесса мгновенной силы роста, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению Васичека. Неизвестные параметры модели, такие как мгновенная доходность рынка, волатильность (изменчивость) курсов, риск на рынке определяются на основе данных статистики предыдущих торгов. Для обобщенного случая модели Васичека приведены примеры применения этой методики к анализу курсов государственных краткосрочных обязательств Российской Федерации (ГКО).

Введение

Проблема анализа поведения курсов бескупонных облигаций – актуальная задача участника финансового рынка, перед которым стоит задача оптимального вложения капитала. С одной стороны, традиционно облигации считаются самым "надежным"(а следовательно, самым низкорисковым и низкодоходным) источником вложения капитала, поскольку выплаты по ним гарантируются государством. С другой стороны, обращаясь на вторичном рынке, эти ценные бумаги попадают под активное влияние всего рынка в целом, в связи с чем их котировки становятся случайными величинами. Практика торговли ГКО показывает, что эти облигации привлекают значительные средства, что делает задачу исследования их поведения весьма актуальной.

1 Основные понятия и принципы моделирования

Основным предметом рассмотрения при анализе финансовых рынков облигаций является величина $S_T(t)$ – курс бескупонной облигации в момент времени t, размещаемой в момент времени $t = 0$ и погашаемой в момент времени $t = T$. Примем номинал облигации за единицу, т.е. положим $S_T(T) = 1$. Тогда, поскольку размещение таких бумаг на фондовом рынке происходит со скидкой, для $t \in \overline{0,\ T-1}$ стоимость облигации $S_T(t) < 1$. Величина

$$r_{t_2}^{t_1} = (S_T(t_2) - S_T(t_1))/(S_T(t_1) \cdot (t_2 - t_1)) \qquad (1)$$

называется средним ростом облигации в течение промежутка времени от t_1 до t_2 за единицу времени.

Для теоретического анализа удобно рассматривать курс такой облигации как непрерывно дифференцируемую функцию от времени $S_T(t),\ t \in [0,\ T]$. Определим функцию

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S_T(t + \Delta t) - S_T(t)}{S_T(t)\Delta t} = \frac{1}{S_T(t)} \frac{dS_T(t)}{dt} = \frac{d(\ln S_T(t))}{dt}, \qquad (2)$$

которая называется силой роста облигации в момент времени t. Считая функцию $r(t)$ известной и не зависящей от T, для нахождения $S_T(t)$ можно решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d(\ln\ S_T(t))}{dt} = r(t). \qquad (3)$$

Интегрируя в пределах от t до T и учитывая условие $S_T(T) = 1$, получаем

$$S_T(t) = \exp\{-\int_t^T r(s)\, ds\}. \qquad (4)$$

Надо заметить, что функция $r(t)$ будет корректно введена лишь при выполнении дополнительного условия для цен облигаций:

$$S_s(t) = S_u(t) S_s(u), \text{ для всех } t < u < s, \qquad (5)$$

которое гарантирует отсутствие арбитражных возможностей на детерминированном рынке облигаций. Если (5) не выполнено, то легко построить арбитражные стратегии, позволяющие извлекать прибыль из нулевого начального капитала.

Применение введенных здесь функций вполне достаточно для описания курса облигации в детерминированном случае (подробнее см. [5]).

При анализе финансовых рынков на основе теории вероятностей фундаментальным понятием является вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$ с множеством Ω элементарных событий ω, σ-алгеброй $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω и вероятностной мерой P на $\mathcal{F}$.

Поле борелевских множеств на вещественной прямой R будем обозначать $\mathcal{B}(R)$.

Математическое ожидание случайной величины определяется как

$$\mathcal{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi d\mathrm{P}$$

в смысле интеграла Лебега.

Функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на $(\Omega,\ \mathcal{F})$ и принимающая значения в $\bar{R} = [-\infty,\ +\infty]$, будет называться расширенной случайной величиной, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(R)$ выполнено условие $\{\omega :\ \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$ – вероятностное пространство, $\mathcal{G}$ – некоторая σ-алгебра, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ и $\xi = \xi(\omega)$ – случайная величина.

Определение 1 *Условным математическим ожиданием неотрицательной случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{G}$ назы-вается неотрицательная расширенная случайная величина, обозначаемая $\mathcal{E}(\xi|\mathcal{G})$, такая, что*

$$\begin{array}{r} a)\ \mathcal{E}(\xi|\mathcal{G}) \text{ является } \mathcal{G} - \text{измеримой}, \\ b)\ \forall A \in \mathcal{G}\ \int\limits_A \xi\, d\mathrm{P} = \int\limits_A \mathcal{E}(\xi|\mathcal{G})\, d\mathrm{P}. \end{array} \qquad (6)$$

Условное математическое ожидание имеет следующие легко доказываемые свойства. Будем считать, что для всех рассматриваемых случайных величин ξ, η математические ожидания определены и σ-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

- Если a, b – постоянные и $a\mathcal{E}(\xi|\mathcal{G}) + b\mathcal{E}(\xi|\mathcal{G})$ определено, то $\mathcal{E}(a\xi + b\eta|\mathcal{G}) = a\mathcal{E}(\xi|\mathcal{G}) + b\mathcal{E}(\xi|\mathcal{G})$,
- $\mathcal{E}(\mathcal{E}(\xi|\mathcal{G})) = \mathcal{E}(\xi)$,
- Если $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, то $\mathcal{E}[\mathcal{E}(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = \mathcal{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$,
- Если $\mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G}_2$, то $\mathcal{E}[\mathcal{E}(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = \mathcal{E}(\xi|\mathcal{G}_\in)$.

Если $\mathtt{P}$ и $\mathtt{P}^*$ – две вероятностные меры, заданные на $(\Omega,\ \mathcal{F})$, то мера $\mathtt{P}^*$ называется абсолютно непрерывной относительно меры $\mathtt{P}$ ($\mathtt{P}^* \ll \mathtt{P}$), если для A из $\mathcal{F}$ такого, что $\mathtt{P}(A) = 0$, следует $\mathtt{P}^*(A) = 0$. Эти меры называются эквивалентными, если $\mathtt{P}^* \ll \mathtt{P}$ и $\mathtt{P} \ll \mathtt{P}^*$. Связь между абсолютно непрерывными мерами описывается следующей теоремой ([1]):

Теорема 1 *(Радона-Никодима) Пусть* $(\Omega,\ \mathcal{F})$ *– измеримое пространство,* λ *–* σ*-конечная мера со знаком (т.е.* $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$*, где по крайней мере одна из мер* λ_1 *или* λ_2 *конечна), являющаяся абсолютно непрерывной относительно* μ*. Тогда существует* $\mathcal{F}$*-измеримая случайная величина* ζ*, принимающая значения в* $\bar{R} = [-\infty,\ +\infty]$ *такая, что*

$$\lambda(A) = \int\limits_A \zeta d\mu,\ A \in \mathcal{F}. \tag{7}$$

Случайная величина ζ в представлении (7) называется производной Радона-Никодима или плотностью меры λ относительно меры μ, и обозначается $\frac{d\lambda}{d\mu}$.

Если μ и λ – конечные меры, $\lambda \ll \mu$ и ζ – $\mathcal{F}$-измеримая случайная величина, то

$$\int\limits_\Omega \zeta\, d\lambda = \int\limits_\Omega \zeta \frac{d\lambda}{d\mu}\, d\mu,$$

где $\frac{d\lambda}{d\mu}$ – производная Радона-Никодима. Другими словами

$$\mathcal{E}_\lambda(\zeta) = \int\limits_\Omega \xi \, d\lambda = \int\limits_\Omega \zeta \frac{d\lambda}{d\mu} \, d\mu = \mathcal{E}_\mu(\zeta \frac{d\lambda}{d\mu}). \tag{8}$$

Из определения производной Радона-Никодима (7) следует также, что $\frac{d\lambda}{d\mu} = \mathcal{E}(\xi|\mathcal{F})$.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t),\ t \in [a,\ b]$. Интеграл $\int\limits_a^b \xi(t)\,dt$ определяют как предел интегральных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi(t_{nk})\Delta t_{nk}$, где $\Delta t_{nk} = t_{nk} - t_{nk-1},\ a = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} = b$.

Также можно определить интеграл $\int\limits_a^b \xi(t)\,dW_t$, называемый стохастическим интегралом Ито. Назовем функцию $\eta(t)$ ступенчатой, если существует такое разбиение отрезка $[a,\ b]:\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b,\ \eta(t) = \eta(t_i)$ при $t \in [t_i,\ t_{i+1}),\ i = \overline{1,\ r-1}$. Для ступенчатых функций определим $\int\limits_a^b \eta(t)\,dW_t = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \eta(t_i)[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]$. Далее построим последовательность ступенчатых функций $\eta_n(t)$ таких, чтобы с вероятностью 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b [\eta_n(t) - \xi(t)]^2\,dt = 0$ (такая последовательность всегда существует) и определим
$\int\limits_a^b \xi(t)\,dW_t = \mathtt{P}\text{-}\lim \int\limits_a^b \eta_n(t)\,dW_t$, где $\mathtt{P}$-lim – сходимость по вероятности, т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \mathtt{P}\{|\zeta_n(t) - \zeta(t)| > \varepsilon\} \to 0,\ n \to +\infty$.

В качестве моделей поведения курсов ценных бумаг часто используются модели типа броуновского движения. Обобщением процесса броуновского движения в случае неоднородной среды является понятие диффузионного процесса, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = a(t,\ \xi(t))\,dt + \sigma(t,\ \xi(t))\,dW_t, \tag{9}$$

т.е. непрерывного случайного процесса с независимыми приращениями, имеющими гауссово распределение. Функция $a(t,\ \xi(t))$

называется коэффициентом переноса, а $\sigma(t,\ \xi(t))$ – коэффициентом диффузии. Здесь W_t – стандартный винеровский процесс, т.е. непрерывный случайный процесс с независимыми нормально распределенными приращениями, причем $\mathcal{E}(W_t)=0,\ \mathcal{D}(W_t)=t$ (Здесь и далее $\mathcal{D}(...)$ – дисперсия). При условии, что $\xi(t_0)$ задано, интегральная форма этого уравнения имеет вид

$$\xi(t)=\xi(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t} a(s,\ \xi(s))\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}\sigma(s,\ \xi(s))\,dW_s. \tag{10}$$

Известно, что

$$\mathcal{E}(\xi(s)|\mathcal{F}_t)=\mathcal{E}(\xi_{t,\ \xi(t)}(s)), \tag{11}$$

где $\xi_{t,\ x}(s)$ – процесс удовлетворяющий уравнению

$$\xi_{t,\ x}(s)=x+\int\limits_{t}^{s} a(u,\ \xi_{t,\ x}(u))\,du+\int\limits_{t}^{s}\sigma(u,\ \xi_{t,\ x}(u))\,dW_u$$

и являющийся решением (9) с начальным значением $\xi_{t_0,x}(t_0)=x$ (см. [2], стр. 475), а $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная случайным процессом $\xi(s),\ s\le t$.

Следующая теорема позволяет описать класс случайных функций ϱ, для которых мера P^* в $\mathcal{F}$, полученная отображением из P, будет соответствовать диффузионному процессу, если только и процесс по мере P был диффузионным.

Теорема 2 *(Теорема Гирсанова в одномерном случае) Пусть W_t – винеровский процесс, $\mathcal{F}_t,\ 0\le t\le T$ – семейство σ-алгебр, для которых $\mathcal{F}_{t_1}\subset\mathcal{F}_{t_2}$, при $t_1<t_2$, W_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$, величины $W_{s+t}-W_t,\ s>0$ не зависят от $\mathcal{F}_t$. Если $f(t)$ – это $\mathcal{F}$-измеримый случайный процесс на $[0,\ T]$, такой, что*

$$\int\limits_0^T f^2(t)\,dt<\infty,\ \ \varrho=\mathcal{E}\exp\{\int\limits_0^T f(t)\,dW_t-\frac{1}{2}\int\limits_0^T f^2(t)\,dt\},\ \ \mathcal{E}\varrho=1$$

и

$$\mathrm{P}^*(A) = \int\limits_A \varrho \, d\mathrm{P},$$

то процесс

$$\tilde{W}_t = W_t - \int\limits_0^t f(s)\, dW_s \qquad (12)$$

по мере P^* *является винеровским процессом.*

2 Вероятностные модели курсов облигаций

При вероятностном подходе к моделированию курса бескупонной облигации силу роста $r(t)$, $0 \le t \le T$ считают случайным процесом. Для каждого $u \le T$ определим процесс $\pi(t,\ u)$, $0 \le t \le u$, удовлетворяющего условию $\pi(u,\ u) = 1$, который представляет собой курс бескупонной облигации в момент времени t с моментом погашения u. Фундаментальное значение имеет следующая гипотеза:

Гипотеза 1 *Существует вероятностная мера* P^* *эквивалентная* P *такая, что для* $u \in [0,\ T]$ *процесс*

$$\tilde{\pi}(t,\ u) = \exp\{-\int\limits_0^t r(s)\, ds\}\pi(t,\ u)$$

является мартингалом.

Это предположение сравнимо с существованием мартингализирующей меры P^*, превращающей котировки рискованных активов типа акций, валют, дисконтированные относительно некоторого безрискового актива, в мартингалы. В последнем случае удается показать, что это предположение эквивалентно отсутствию на фондовом рынке арбитражных стратегий.

Будем далее использовать обозначения

$$\mathcal{E}_{\mathrm{P}^*}(\ldots) = \mathcal{E}^*(\ldots),\ \ \mathcal{E}_{\mathrm{P}}(\ldots) = \mathcal{E}(\ldots).$$

С учетом свойств мартингальных процессов, свойств условных математических ожиданий и того, что $\pi(u,\ u) = 1$ получаем:

$$\tilde{\pi}(t,\ u) = \mathcal{E}^*(\tilde{\pi}(u,\ u)|\mathcal{F}_t) = \mathcal{E}^*(\exp\{-\int\limits_0^u r(s)\,ds\}|\mathcal{F}_t),$$

$$\pi(t,\ u) = \mathcal{E}^*(\exp\{-\int\limits_t^u r(s)\,ds\}|\mathcal{F}_t). \tag{13}$$

Сравнивая (13) с (4), мы видим, что процесс $\pi(t,\ u)$ зависит только от поведения процесса $r(s),\ 0 \le s \le T$ по мере P^*. Предположение, сделанное в гипотезе 1, позволяет нам выразить плотность вероятностной меры P^* относительно меры P, другими словами производную Радона-Никодима, определенную в (7). Обозначим ее L_T. Из (8) следует, что для любого $X \ge 0$ $\mathcal{E}^*(X) = \mathcal{E}(XL_T)$. Если к тому же X является $\mathcal{F}_t$-измеримой, то $\mathcal{E}^*(X) = \mathcal{E}(XL_t)$, где $L_t = \mathcal{E}(L_T|\mathcal{F}_t)$, (т.к. $\mathcal{E}(XL_t) = \mathcal{E}(X\mathcal{E}(L_T|\mathcal{F}_t)) = \mathcal{E}(\mathcal{E}(XL_T|\mathcal{F}_t)) = \mathcal{E}(XL_T))$.

Теорема 3 *Существует процесс $q(t),\ 0 \le t \le T$, такой, что для $t \in [0,\ T],\ L_t = \exp\{\int\limits_0^t q(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t q^2(s)\,ds\}$.*

Теорема 4 *Курс бескупонной облигации в момент времени $t \le u$ с моментом погашения u может быть представлен как*

$$\pi(t,\ u) = \mathcal{E}(\exp\{-\int\limits_t^u r(s)\,ds + \int\limits_t^u q(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_t^u q^2(s)\,ds\}|\mathcal{F}_t). \tag{14}$$

Доказательство следует из теоремы 3 и того, что для любой случайной величины $\xi \ge 0$

$$\mathcal{E}^*(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(\xi\ L_T|\mathcal{F}_t)/L_t = \mathcal{E}(\xi\ L_T|\mathcal{F}_t)/\mathcal{E}(L_T|\mathcal{F}_t).$$

Последнее утверждение называется обобщенной теоремой Байеса (см. [1], стр. 247).

Теорема 5 *Для любого* u *существует процесс* $(\sigma_t^u)_{0\le t\le u}$ *такой, что на* $[0,\ u]$

$$\frac{d\pi(t,\ u)}{\pi(t,\ u)} = (r(t) - \sigma_t^u q(t))dt + \sigma_t^u\, dW_t. \tag{15}$$

Замечание: Формула (15) может быть сопоставлена с уравнением (3) из раздела 1, представляющая собой выражение для так называемого безрискового актива. $-q(t)$ можно интерпретировать как "премию за риск". Процесс $\tilde{W}_t$, определяемый как

$$\tilde{W}_t = W_t - \int\limits_0^t q(s)\, ds \tag{16}$$

является винеровским по мере P^*(по теореме Гирсанова) и, следовательно,

$$\frac{d\pi(t,\ u)}{\pi(t,\ u)} = r(t)dt + \sigma_t^u\, d\tilde{W}_t.$$

Поэтому вероятностную меру P^* часто называют "мерой нейтральной к риску".

3 Некоторые классические модели и их модификации

Дальнейшее развитие моделей подобного рода строятся на предположениях о принадлежности этих процессов определенному классу (различные подходы к этому вопросу рассмотрены в [6]). Будем предполагать, что $r(t)$ является процессом диффузионного типа, удовлетворяющего в общем виде стохастическому уравнению (9).

В 1977 году Васичеком [7] было предложено стохастическое уравнение вида

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t,$$

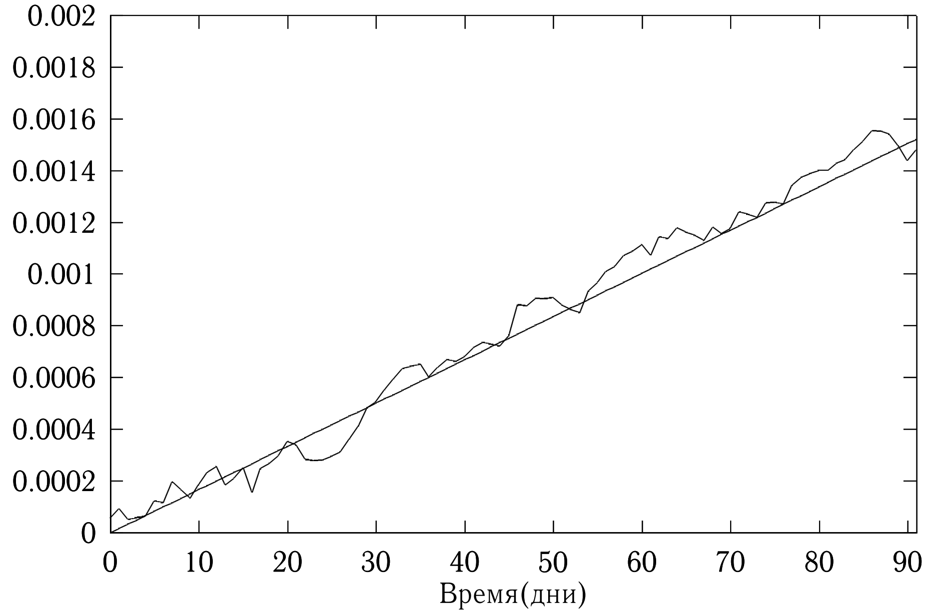

Рис. 1: Графики детерминированной и стохастической силы роста $r(t)$.

а в 1985 году Коксом, Ингерсоллом и Россом [8] уравнение

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t,$$

которое в 1986 году было дополнительно исследовано Брауном и Дибвигом [9]. Несмотря на кажущееся принципиально незначительное отличие этих двух уравнений, исследование решения второго из них оказалось намного сложнее, так что его практическое применение по сравнению с первым уравнением сильно затруднено.

Параметры a, b, σ можно интерпретировать соответственно как коэффициент масштаба, среднюю долгосрочную силу роста, волатильность или изменчивость курсов.

Проблема практического применения стохастического уравнения Васичека заключается в невозможности рассмотреть случай постоянного коэффициента переноса. Поэтому далее рассмотрим уравнение диффузии вида

$$dr(t) = (\mu + \nu r(t))dt + \sigma dW_t, \tag{17}$$

где $\mu,\ \sigma \in R,\ \nu \neq 0,\ t \in [0,\ T]$. Будем также предполагать, что в начальный момент времени $t = 0$ мгновенная доходность $r(0)$ является гауссовской случайной величиной с параметрами $\mathcal{E}(r(0)) = 0$ и $\mathcal{D}(r(0)) = g$, что соответствует предположению о случайности цен первичного размещения облигаций. Заметим, что можно рассматривать случай $r(0) = r_0$ и $g = 0$, т.е. предполагать, что вторичный рынок не влияет на цену размещения облигации, оценивая r_0, например, путем линеаризации формулы (2), однако, последнее, по-видимому, оправдано лишь при большом количестве данных о ценах размещения облигаций.

Как видно из (13), (14) для того, чтобы найти выражение для $\pi(t,\ T)$, необходимо знать динамику процесса $r(t)$ по мере P^* или динамику пары процессов $(r(t),\ q(t))$ по мере P. Будем считать, что это уравнение записано для процесса $r(t)$ по мере P, тогда необходимо ввести процесс $q(t)$, характеризующий систематический риск рынка. В простейшем случае можно предположить, что $q(t) = -\lambda$. Введем случайный процесс $\xi(t) = \mu + \nu r(t)$, тогда

$$d\xi(t) = \nu\xi(t)dt + \sigma\nu\, dW_t \tag{18}$$

и $\xi(0) = \mu + \nu r(0)$. Решение уравнения (9) можно получить, применяя, например, метод Бернулли ([3]); оно представимо в виде

$$\xi(t) = \xi(0)e^{\nu t} + \nu\sigma e^{\nu t}\int\limits_0^t e^{-\nu s}\, dW_s, \tag{19}$$

откуда

$$r(t) = r(0)e^{\nu t} + \frac{\mu}{\nu}(e^{\nu t} - 1) + \sigma e^{\nu t}\int\limits_0^t e^{-\nu s}\, dW_s.$$

Сразу заметим, что

$$\mathcal{E}(r(t)) = \frac{\mu}{\nu}(e^{\nu t} - 1), \ \mathcal{D}(r(t)) = e^{2\nu t}g + \frac{\sigma^2}{2\nu}(e^{2\nu t} - 1). \tag{20}$$

Решение уравнения (18) в случае $\nu = 0$ можно получить предельным переходом $\nu \to 0$. Так как $\lim\limits_{\nu\to 0} \frac{e^{\nu t}-1}{\nu} = t$, то $r(t) = \mu t + \sigma W_t$ для уравнения $dr(t) = \mu dt + \sigma dW_t$. В этом случае

$$\mathcal{E}(r(t)) = \mu t, \ \mathcal{D}(r(t)) = \sigma^2 t + g. \tag{20*}$$

Понятно, что получить формулу для $\pi(t, \ T)$ легче, действуя по мере P^*, т.к. можно воспользоваться мартингальностью цен облигаций по мере P^*, это также легко заметить, сравнив формулы (13) и (14). В качестве первого шага получим уравнение для $r(t)$ по мере P^*. Легко видеть, что $dr(t) = (\mu^* + \nu r(t))\,dt + \sigma\,d\tilde{W}_t$, где $\mu^* = \mu - \sigma\lambda$, а $\tilde{W}_t$ определяется в силу (16). Из соотношения (13)

$$\begin{aligned} \pi(t, \ T) &= \mathcal{E}^*(\exp\{-\int_t^T r(s)\,ds\}|\mathcal{F}_t) = \\ &= \exp\{-\tfrac{\mu^*}{\nu}(T-t)\}\mathcal{E}^*(\exp\{-\int_t^T \tfrac{\xi^*(s)}{\nu}\,ds\}|\mathcal{F}_t), \end{aligned} \tag{21}$$

где $\xi^*(s) = \mu^* + \nu r(s)$. Так как

$$d\xi^*(t) = \nu\xi^*(t)dt + \sigma\nu\,d\tilde{W}_t \tag{22}$$

(см. (18)) и поскольку $\xi^*(t)$ – решение диффузионного уравнения (22) с независящими от t коэффициентами (см. [2], стр. 481), то можно записать, что

$$\mathcal{E}^*(\exp\{-\int_t^T \frac{\xi^*(s)}{\nu}\,ds\}|\mathcal{F}_t) = F(T-t, \ \xi^*(t)) = F(T-t, \ \mu^* + \nu r(t)),$$

где в силу (11) F определена как $F(\theta, \ x) = \mathcal{E}^*(\exp\{-\int_0^\theta \frac{\xi^*_x(s)}{\nu}\,ds\})$, а $\xi^*_x(s)$ – единственное решение уравнения (22), удовлетворяющее условию

$$\xi^*_x(0) = x. \tag{23}$$

Теперь мы можем вычислить $F(\theta,\ x)$. Из определения $F(\theta,\ x)$ и преобразования Лапласа гауссовской случайной величины получаем

$$F(\theta,\ x) = \mathcal{E}^*(\exp\{-\int\limits_0^\theta \frac{\xi_x^*(s)}{\nu}\,ds\}) = \\ = \exp\{-\mathcal{E}^*(\int\limits_0^\theta \frac{\xi_x^*(s)}{\nu}\,ds) + \frac{1}{2}\mathcal{D}^*(\int\limits_0^\theta \frac{\xi_x^*(s)}{\nu}\,ds)\}. \tag{24}$$

Используя то, что

$$\xi^*(t) = \xi^*(0)e^{\nu t} + \nu\sigma e^{\nu t}\int\limits_0^t e^{-\nu s}\,d\tilde{W}_s, \tag{25}$$

(см. (19) и (22)), имеем

$$\mathcal{E}^*(\int\limits_0^\theta \frac{\xi_x^*(s)}{\nu}\,ds) = \frac{1}{\nu}\int\limits_0^\theta \mathcal{E}^*(\xi_x^*(s))\,ds = \frac{1}{\nu}\int\limits_0^\theta xe^{\nu s}\,ds = \frac{1}{\nu^2}x(e^{\nu\theta}-1).$$

Из (25), следствия из теоремы Фубини (см. [2], стр. 250), определения матрицы ковариации для винеровского процесса и свойств стохастических интегралов Ито (см. [2], стр. 463)

$$\mathcal{D}^*(\int\limits_0^\theta \frac{\xi_x^*(s)}{\nu}\,ds) = cov(\int\limits_0^\theta \frac{\xi_x^*(s)}{\nu}\,ds,\ \int\limits_0^\theta \frac{\xi_x^*(s)}{\nu}\,ds) =$$

$$= \frac{1}{\nu^2}\int\limits_\Omega cov(\xi_x^*(t),\ \xi_x^*(u))\,dt\,du =$$

$$= \frac{1}{\nu^2}\int\limits_\Omega \sigma^2\nu^2 e^{\nu(t+u)}\mathcal{E}^*(\int\limits_0^t e^{-\nu s}\,d\tilde{W}_s\int\limits_0^u e^{-\nu s}\,d\tilde{W}_s)\,dt\,du =$$

$$= \sigma^2\int\limits_\Omega e^{\nu(t+u)}(\int\limits_0^{t\wedge u} e^{-2\nu s}\,ds)\,dt\,du = \frac{\sigma^2}{2\nu}\int\limits_\Omega e^{\nu(t+u)}(1-e^{-2\nu(t\wedge u)})\,dt\,du =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\nu} \int\limits_0^\theta e^{\nu t}\, dt \int\limits_0^t e^{\nu u}(1-e^{-2\nu u})\, du,\ \Omega = \{(u,\ t) :\ 0 \le u \le \theta,\ 0 \le t \le \theta\}.$$

Вычислив этот интеграл, получим $\mathcal{D}^*(\int\limits_0^\theta \frac{\xi_x^*(s)}{\nu}\, ds) = \frac{\sigma^2}{2\nu^3}(1-e^{\nu\theta})^2 + \frac{\sigma^2}{\nu^3}(1 - e^{\nu\theta}) + \frac{\sigma^2}{\nu^2}\theta$. Подставляя в (24) и затем в (21), получим

$$\begin{gathered}\pi(t,\ T) = \exp\{\tfrac{\mu^*}{\nu}\theta + \tfrac{1}{\nu^2}(\mu^* + \nu r(t))(1 - e^{\nu\theta}) + \\ + \tfrac{\sigma^2}{4\nu^3}(1 - e^{\nu\theta})^2 + \tfrac{\sigma^2}{2\nu^3}(1 - e^{\nu\theta}) + \tfrac{\sigma^2}{2\nu^2}\theta\},\ \theta = T - t.\end{gathered} \tag{26}$$

На практике удобно использовать этот результат в несколько другом виде. Несложно убедиться, что из (26) следует с учетом (20), что случайный процесс $\eta(t) = \ln \pi(t,\ T)$ является гауссовским с параметрами

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(\eta(t)) = \alpha(t) = (\tfrac{\mu^*}{\nu} + \tfrac{\sigma^2}{2\nu^2})\theta + (\tfrac{\mu^*}{\nu^2} + \tfrac{\sigma^2}{2\nu^3})(1 - e^{\nu\theta}) - \\ - \tfrac{\mu}{\nu^2}(1 - e^{\nu\theta})(1 - e^{\nu t}) + \tfrac{\sigma^2}{4\nu^3}(1 - e^{\nu\theta})^2, \\ \mathcal{D}(\eta(t)) = \beta^2(t) = (e^{2\nu t}g + \tfrac{\sigma^2}{2\nu}(e^{2\nu t} - 1))\tfrac{(1-e^{\nu\theta})^2}{\nu^2}.\end{gathered} \tag{26*}$$

Из (26) видно, что при рассмотрении диффузионного процесса при $\nu = 0$ ее нельзя преобразовывать предельным переходом $\nu \to 0$, поэтому такие же рассуждения проведем для диффузионного процесса

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{27}$$

По мере $\mathtt{P}^*$ процесс $r(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dr(t) = \mu^* dt + \sigma\, d\tilde{W}_t,$$

где $\mu^* = \mu - \sigma\lambda$ и $r(t) = \mu^* t + \sigma\tilde{W}_t$.

Отсюда $\pi(t,\ T) = \mathcal{E}^*(\exp\{-\int\limits_t^T r(s)\, ds\}|\mathcal{F}_t) = F(T - t,\ r(t))$, где F определена как

$$F(\theta,\ x) = \mathcal{E}^*(\exp\{-\int\limits_0^\theta r_x(s)\, ds\}) =$$

$$= \exp\{-\mathcal{E}^*(\int\limits_0^\theta r_x(s)\,ds) + \frac{1}{2}\mathcal{D}^*(\int\limits_0^\theta r_x(s)\,ds)\},$$

а $r_x(s)$ – единственное решение уравнения (27), удовлетворяющее условию $r_x(0) = x$.

$$\mathcal{E}^*(\int\limits_0^\theta r_x(s)\,ds) = \int\limits_0^\theta \mathcal{E}^*(r_x(s))\,ds = \int\limits_0^\theta (\mu^* s + x)\,ds = x\theta + \frac{\mu^*\theta^2}{2},$$

$$\mathcal{D}^*(\int\limits_0^\theta r_x(s)\,ds) = cov(\int\limits_0^\theta r_x(s)\,ds,\ \int\limits_0^\theta r_x(s)\,ds) =$$

$$= \int\limits_\Omega cov(r_x(t),\ r_x(u))\,dt\,du =$$

$$= \sigma^2 \int\limits_\Omega (t \wedge u)\,dt\,du = 2\sigma^2 \int\limits_0^\theta dt \int\limits_0^t u\,du = \frac{\sigma^2\theta^3}{3},$$

где $\Omega = \{(u,\ t):\ 0 \le u \le \theta,\ 0 \le t \le \theta\}$.

Отсюда следует формула для цены облигации:

$$\pi(t,\ T) = \exp\{\frac{\sigma^2(T-t)^3}{6} - \mu^*\frac{(T-t)^2}{2} - r(t)(T-t)\}, \qquad (28)$$

где $\mu^* = \mu - \sigma\lambda$ и $r(t)$ – случайный гауссовский процесс с параметрами

$$\mathcal{E}(r(t)) = \mu t,\ \mathcal{D}(r(t)) = \sigma^2 t + g.$$

(см. (20*)).

Аналогично (26*) заключаем, что $\eta(t) = \ln \pi(t,\ T)$ является гауссовским с параметрами

$$\mathcal{E}(\eta(t)) = \alpha(t) = \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6} - \mu^*\frac{(T-t)^2}{2} - (T-t)\mu t,$$

$$\mathcal{D}(\eta(t)) = \beta^2(t) = (\sigma^2 t + g)(T-t)^2. \qquad (28^*)$$

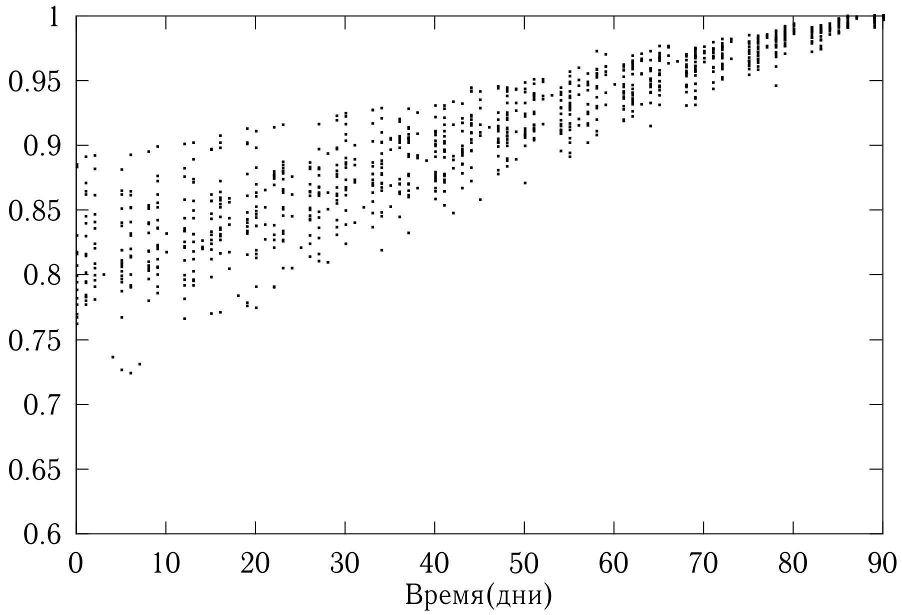

Рис. 2: Исходная статистическая информация по торгам ГКО. По оси ординат отложены средневзвешенные котировки ГКО.

4 Анализ эмпирической статистики

Указанные модели применялись для анализа эмпирической статистики по торгам ГКО. В качестве исходных данных брались данные по торгам ГКО в 1995-1997 годах на ММВБ, представленные на рис. 2. Эти данные образуют, по-видимому, наиболее полную статистическую информацию о российских финансовых рынках. Общее количество используемых в работе данных составило 5532 точки, характеризующие средневзвешенные курсы ГКО 91- и 181-дневных облигаций. Для каждого типа облигаций средневзвешенная котировка предполагалась зависящей лишь от количества дней, прошедших от времени выпуска облигации.

4.1 Идентификация параметров

Наиболее важной проблемой применения финансовых моделей (26*) или (28*) является идентификация их параметров применительно к реальным данным. В каждый фиксированный момент времени t, $t = \overline{0,\ T-1}$ имеется вектор значений p_i^t, $i = \overline{0,\ n_t - 1}$, где n_t – количество имеющихся наблюдений. Значение n_t для реестра 91-дневных ГКО не превышает 23 значений (для 181-дневных - 19). Согласно (28*) или (26*) вектор $\ln\ p_i^t$, $i = \overline{0,\ n_t - 1}$ является выборкой из нормального распределения со средним и дисперсией, являющимися функциями от неизвестных параметров. Можно оценить эти параметры с помощью метода максимального правдоподобия, решая задачи

$$n_t \ln\ \beta(t) + \frac{1}{2\beta^2(t)} \sum_{i=0}^{n_t} (\ln\ p_i^t - \alpha(t))^2 \to \min,\ t = \overline{0,\ T-1}. \quad (29)$$

Заметим, что параметры считаются постоянными в течение всего промежутка времени обращения всех бумаг из реестра бумаг.

Из-за положительности функций правдоподобия (29) можно искать неизвестные параметры из условия минимума функционала

$$\sum_{t=0}^{T-1} (n_t \ln\ \beta(t) + \frac{1}{2\beta^2(t)} \sum_{i=0}^{n_t} (\ln\ p_i^t - \alpha(t))^2). \quad (30)$$

Рассмотрим вопрос о том насколько верным является предположение о том, что вектор $\ln\ p_i^t$ при фиксированном t задает выборку из нормального семейства. Это можно сделать, используя асимптотический критерий χ^2 (см. [4], стр. 408). Критерий отношения правдоподобия в этом случае имеет вид

$$\hat{\chi}(X) = \sum_{j=1}^{q} \frac{(\nu_j - n_t p_j(\alpha))^2}{n_t p_j(\alpha)} > h_\varepsilon,$$

где $\alpha = (\alpha(t),\ \beta^2(t))$ – двумерный параметр нормального семейства (математической ожидание и дисперсия), q – количество интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_q$ разбиения промежутка значений выборки ($q >$

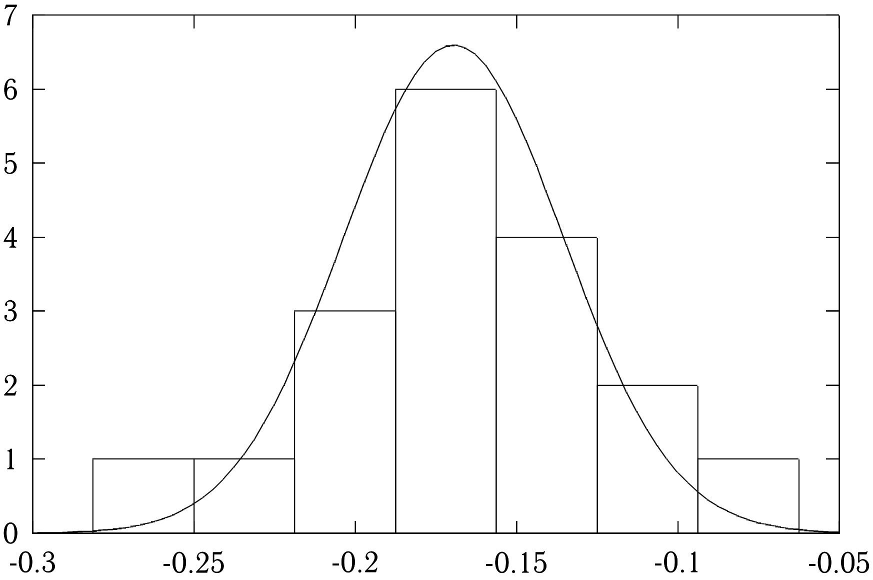

Рис. 3: Гистограмма логарифмов средневзвешенных котировок 91-дневных ГКО. Количество интервалов разбиения $q = 32$, $t = 20$. Сплошная линия – нормальное распределение, получаемое из модели (28*).

1), ν_j – количество значений выборки, попавших в интервал Δ_j, $p_j(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta(t)} \int\limits_{\Delta_j} \exp\{-\frac{(x-\alpha(t))^2}{2\beta^2(t)}\,dt\}$ – теоретическая вероятность попадания значений выборки в интервал Δ_j, h_ε – квантиль порядка ε, где ε – асимптотический уровень доверия, распределения χ^2 с $r-1$ степенями свободы.

Минимизация функционала (30) представляет собой довольно сложную с вычислительной точки зрения задачу. Поскольку из (26*), (28*) известны математическое ожидание и дисперсия распределений логарифмов цен в каждый момент времени, то оценку параметров можно сделать с помощью метода моментов. Из

(28*) видно, что в выражении для дисперсии неизвестно всего два параметра σ, g, поэтому формально можно найти сначала g из условия равенства $\beta^2(0) = gT^2 = D_0$, а затем параметр σ из уравнения $(\sigma^2 t_i + g)(T - t_i)^2 = D_{t_i}$, где t_i – некоторый момент времени, $D_{t_i} = \frac{1}{n_{t_i}} \sum\limits_{j=0}^{n_{t_i}-1} (\ln\ p_j^{t_i} - \frac{1}{n_{t_i}} \sum\limits_{j=0}^{n_{t_i}-1} \ln\ p_j^{t_i})$. Чтобы учесть влияние на параметр других моментов времени параметры σ, g определялись из условия минимума функционала

$$F_1 = \sum_{t=0}^{T-1} ((\sigma^2 t + g)(T - t)^2 - D_t)^2 \qquad (31)$$

После этого, остальные параметры находились из условия минимума функционала

$$F_2 = \sum_{t=0}^{T-1} (\alpha(t) - M_t)^2, \qquad (32)$$

где $M_t = \sum\limits_{j=0}^{n_t-1} \ln\ p_j^t$, $\alpha(t)$ определяется из (28*) или (26*) при условии, что ранее найденные параметры уже известны. Вычислительные эксперименты проводились при помощи среды Mathcad 7.0 и пакета Minos [10], результаты приведены в табл. 1.

Заметим, что описанное выше определение параметров моделей (26*), (28*) проводилось с учетом всего 2 типов выборок (91- и 181-дневных облигаций) в силу того, что эти облигации преобладают на краткосрочном вторичном рынке, по ним совершается большой объем сделок, что позволяет считать влияние других бумаг малозначительным. В связи с этим, во-первых, для более точного моделирования необходимо учитывать по-возможности больший объем данных и, во-вторых, предполагать постоянство параметров модели в течение некоторого промежутка времени, например, недели, что позволяет рассматривать изменяющиеся значения параметров (это целесообразно делать в силу небольшого объема

Таблица 1: Значения параметров моделей (28*), (26*)

	91-дневные в модели (28*)	181-дневные в модели (28*)	91-дневные в модели (26*)	181-дневные в модели (26*)
σ	$3{,}35934 \cdot 10^{-5}$	$5{,}26435 \cdot 10^{-5}$	$3{,}3336991 \cdot 10^{-5}$	$5{,}24937 \cdot 10^{-5}$
g	$2{,}072258 \cdot 10^{-7}$	$4{,}654546 \cdot 10^{-7}$	$2{,}061804 \cdot 10^{-7}$	$4{,}640966 \cdot 10^{-7}$
ν	-	-	$5{,}555897 \cdot 10^{-5}$	$1{,}621 \cdot 10^{-5}$
F_1	$2{,}85698 \cdot 10^{-5}$	$2{,}6314 \cdot 10^{-3}$	$2{,}85698 \cdot 10^{-5}$	$2{,}6314 \cdot 10^{-3}$
μ	$1{,}671899 \cdot 10^{-5}$	$7{,}731868 \cdot 10^{-6}$	$1{,}7618454 \cdot 10^{-5}$	$7{,}962 \cdot 10^{-6}$
λ	-1,223052	-0,43644	-1,1781208	-0,43
F_2	0,034841	0,208949	0,0352934	0,209218

данных по конкретным дням, что влияет на качество статистических решений).

5 Заключение

В работе дано обобщение классической модели Васичека, состоящего в рассмотрении диффузионного уравнения, используемого моделью ($dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t$), в более общем виде ($dr(t) = (\mu + \nu r(t))dt + \sigma dW_t$). Эта модель примененяется для описания вероятностной динамики курсов облигаций. Оптимальный подбор параметров модели позволил свести среднюю ошибку прогноза к величинам порядка 1%. Проведена статистическая верификация модели, подтверждающая гипотезу о нормальном характере распределения логарифмов цен. Совместное построение линий "поддержки"и "сопротивления"и кривой "среднего"значения цены дополнительно позволяет локально идентифицировать тренд и более точно предсказать курс облигации. Знание поведения среднего значения цены позволяет построить краткосрочные прогнозы на основе цен торгов по конкретной облигации в предыдущие моменты времени, с ошибкой порядка 0,05%.

Список литературы

1. Ширяев А. Н. Вероятность: Учеб. пособ. для вузов.–2-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.–640 с.

2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов.–2-е изд.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.–568 с.

3. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие.-2-е из., перераб.-М.: Высш. шк., 1989.-383 с.: ил.

4. Боровков А. А. Математическая статистика.–Учебник.–М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.–472 с.

5. Первозванский А. А., Первозванская Т. Н. Финансовый рынок: расчет и риск.– М.: Инфра-М, 1994.–192 с.

6. Odegaard Bernt Arne Financial Numerical Recipes, Norwegian School of Management, Department of Business Economics.

7. O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 5:-88, 1977.

8. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 53:-408, 1985.

9. Stephen J. Brown and Philip H. Dybvig. The empirical implications of the Cox, Ingersoll, Ross theory of the term structure of interest rates. Journal of Finance, 41:-32, 1986.

10. Bruce A. Murtagh, Michael A. Saunders. MINOS. A large-scale nonlinear programming system. User’s guide. Technical report SOL 77-9, 1977, Stanford University.