ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ МЕТОДЕ ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННЫХ ОТСЕЧЕНИЙ ДЛЯ БЛОЧНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.С. Величко, к.ф.-м.н.

Институт автоматики и процессов управления, Владивосток
e-mail: vandre@dvo.ru

Аннотация. В статье показан способ построения плотных и ε-отсечений, которые используются в параллельном декомпозиционном алгоритме прямо-двойственных отсечений, применяемом для двублочных задач линейного программирования. Задача построения таких отсечений основана на вычислении точных или ε-субградиентов кусочно-линейных функций отклика и сводится к точному или приближенному решению подзадач алгоритма. Доказана сходимость алгоритма с использованием ε-отсечений.

Ключевые слова: декомпозиция, отсечение, блочный, линейный, программирование, приближенный, ε-субградиент.

Введение

В работе [2] был предложен прямо-двойственный алгоритм, используемый для решения двублочных оптимизационных задач, и доказана его сходимость при достаточно общих предположениях. В случае возникновения недопустимых и неограниченных подзадач алгоритма необходима его модификация [1]. Вычислительные эксперименты проводились для двублочных задач декомпозиции метода конечных элементов, стохастического программирования и экономической задачи о репликации портфеля рыночных активов. В этих различных по структуре задачах алгоритм продемонстрировал полиномиальную вычислительную сложность $O(n^k)$ с показателем степени k порядка 4.

Выигрыш от использования параллелизма составляет в большинстве тестов 20-25%. Вычислительные эксперименты проводились как на отдельных вычислительных узлах в локальной сети, так и на многопроцессорных вычислительных комплексах МВС-1000/16, МВС-1000/17 в составе Центра коллективного пользования "Дальневосточный вычислительный ресурс"(ЦКП ДВВР) [3].

Перспективным направлением развития данного алгоритма является использование ε-отсечений, основанных на приближенном решении подзадач алгоритма. Для этого необходимо уметь вычислять ε-субградиенты кусочно-линейных функций отклика. Важным для приложений является вопрос использования минимальной доступной прямо-двойственной информации, получаемой в процессе приближенного итеративного решения подзадач.

1. Теоретическая постановка структурированной линейной оптимизационной задачи

В качестве основной модели структурированной оптимизационной задачи рассмотрим двублочную проблему следующего вида:

$$\min_{z_A, z_B, x} \quad c_A z_A + c_B z_B, \tag{1}$$

$$A_A z_A \qquad\qquad + B_A x \le d_A, \tag{2}$$

$$A_B z_B \quad + B_B x \le d_B, \tag{3}$$

$$z_A \ge 0,\ z_B \ge 0, \tag{4}$$

где z_A, z_B – векторы переменных задачи, x – вектор связывающих переменных, $A_A,\ A_B,\ B_A,\ B_B$ – матрицы соответствующих размерностей.

При фиксированном x эта задача распадается на два независимых блока, что используется для развития декомпозиционного алгоритма двойственных отсечений.

Введя функции отклика

$$f_A(x) = \min_{\substack{z_A \ge 0 \\ A_A z_A \le d_A - B_A x}} c_A z_A, \qquad f_B(x) = \min_{\substack{z_B \ge 0 \\ A_B z_B \le d_B - B_B x}} c_B z_B, \tag{5}$$

получим эквивалентную для (1)-(4) задачу:

$$\min_x \{f_A(x) + f_B(x)\}. \tag{6}$$

Используя сопряженные функции $h_A(p)$ и $h_B(p)$:

$$h_A(p) = f_A^*(x) = \max_x \{px - f_A(x)\},\ h_B(p) = f_B^*(x) = \max_x \{px - f_B(x)\}$$

задачу (6) легко переписать в терминах сопряженных функций:

$$\min_p \{h_A(-p) + h_B(p)\}. \tag{7}$$

Такая эквивалентность задач (6) и (7) позволяет организовать эффективный процесс обмена координирующей информацией между прямыми и двойственными задачами линейного программирования в декомпозиционном подходе к решению задачи (1)-(4).

2. Построение плотных отсечений в параллельном алгоритме прямо-двойственных отсечений

k-ая итерация параллельного алгоритма прямо-двойственных отсечений для задачи (6) показана на рисунке 3.

Кусочно-линейные аппроксимации $f_B^k(x) = \max\{f_B^{k-1}(x),\ \bar{p}^k x - h_B(\bar{p}^k),\ p^k x - h_B(p^k)\}$ и $h_A^k(p) = \max\{h_A^{k-1}(p),\ p\bar{x}^k - f_A(\bar{x}^k),\ px^{k+1} - f_A(x^{k+1})\}$ используют информацию о всех отсечениях, уже построенных до данного шага. После выполнения вычислений в каждом из блоков, осуществляется обмен значениями x^{k+1}, p^{k+1} между процессами для дальнейших вычислений на следующей итерации алгоритма.

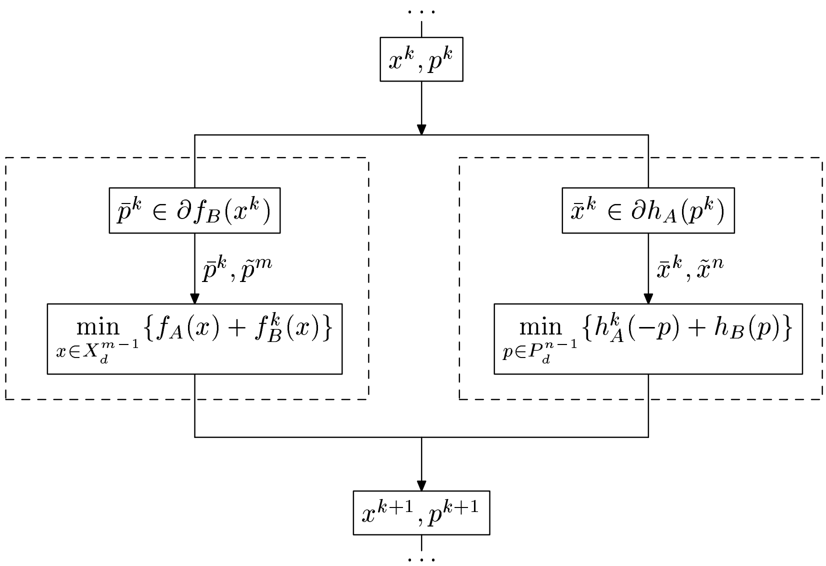
Важными вычислительными задачами алгоритма являются вычисление субградиентов функций $f_B(\cdot)$, $h_A(\cdot)$.

Пусть $f_B(x)$ определена соотношением (5). Тогда для некоторого фиксированного вектора $\bar{x}$ имеем

$$f_B(\bar{x}) \quad = \min_{\substack{z_B, x \\ A_B z_B + B_B x \le d_B, \\ x = \bar{x},\, z_B \ge 0.}} c_B z_B, \tag{8}$$

Из стандартной теории двойственности линейного программирования и теории выпуклого анализа легко получить следующее утверждение.

Рис. 3. k-ый шаг параллельного алгоритма прямо-двойственных отсечений.



Теорема 1 *Пусть задача (8) разрешима для заданного $\bar{x}$, p^* является вектором оптимальных двойственных переменных к ограничению $x = \bar{x}$ в задаче (8). Тогда $p^* \in \partial f_B(\bar{x})$, и обратно, любой вектор $p^* \in \partial f_B(\bar{x})$ является вектором оптимальных двойственных переменных, соответствующих ограничению $x = \bar{x}$ в задаче (8).*

В процессе выполнения алгоритма могут возникать некорректные задачи, в работе [1] показано как построить дополнительные отсечения и модифицировать алгоритм в случаях недопустимости или неограниченности возникающих подзадач.

Решить проблему неразрешимости подзадач алгоритма двойственных отсечений можно, добавляя дополнительные отсечения. При вычислении $f_B(x^k)$ и $\bar{p}^k \in \partial f_B(x^k)$ находится отсечение вида $p_d^m x \le p_d^m x^k - \phi(x^k)$, где $\phi(x^k)$ определяется в результате решения задачи

$$\begin{aligned} \phi(x^k) = \quad & \min_{z_B, x, s} \|s\|_1, \\ & A_B z_B + B_B x \le d_B, \\ & x + s = x^k, z_B \ge 0. \end{aligned} \tag{9}$$

По теореме 1 p_d^m находится как двойственный вектор к ограничению $x + s = x^k$ в задаче (9) поиска допустимого базиса для последующего решения задачи (8).

Такие отсечения отделяют область недопустимых аргументов x^k от эффективного множества функции $f_B(x)$, которое описывается условием $f_B(x) < +\infty$, $f_B(x) \not\equiv -\infty$ и которое обозначается как $\operatorname{dom} f_B$. Отсечения аппроксимируют $\operatorname{dom} f_B$ и формируют множество допустимости $X_d^m = X_d^{m-1} \cup \{x : \ p_d^m x \le h_d^m = p_d^m x^k - \phi(x^k)\}$, что препятствует возникновению недопустимости на следующих итерациях алгоритма. Отсечение, определяемое после решения подзадачи (9), показано на рисунке 1. Возможны и другие стратегии построения отсечений. Используя евклидову метрику для задачи минимизации нормы вектора невязок в задаче (9), получим вектор $\tilde{q}^k$, показанный на рисунке 2.

Сложность решения задачи (8) на практике заключается в том, что невозможно использовать стратегию досчета, часто применяемую для класса методов отсечений. Ее использование возможно, когда оптимальное решение некоторой подзадачи можно использовать в качестве допустимого для решения этой задачи на следующей итерации алгоритма.

С другой стороны, такой досчет можно осуществить в двойственной постановке, однако размерность базиса в последней задаче существенно выше, чем в исходной. Поэтому возникает вопрос об эффективном использовании информации в процессе приближенного решения задачи (8) симплекс-методом для построения ε-отсечений.

Рис. 1.

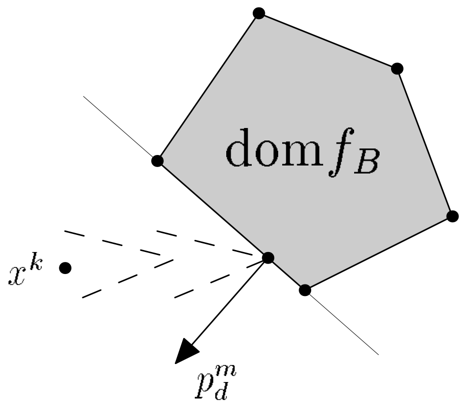
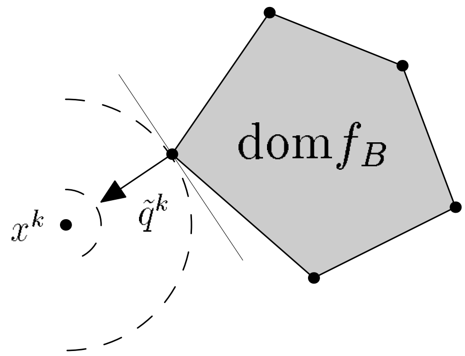


Рис. 2.



3. Построение ε-отсечений и использование приближенных решений подзадач алгоритма

В приведенных выше формулировках f_B, h_A являются выпуклыми кусочно-линейными функциями, в этих условиях удается доказать сходимость алгоритма с использованием приближенных решений подзадач.

Теорема 2 *Пусть f_B, h_A, определенные в (5), являются конечными, выпуклыми и кусочно-линейными, задачи поиска субградиентов функций f_B, h_A решаются приближенно с некоторой точностью ε_k и $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Последовательности $\{x^k\}, \{p^k\}$, генерируемые алгоритмом, ограничены. Тогда все предельные точки последовательностей $\{x^k\}, \{p^k\}$ являются решениями задач (6), (7) соответственно.*

Доказательство:

В силу теорем двойственности для $x^k \in \operatorname{dom} f_B$ задача вычисления $\bar{p}^k \in \partial f_B(x^k)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f_B(x^k) = \max_{u,\ p}\ & du + x^k p, \\ & u'A_B \le c, \\ & u'B_B + p_B \le 0, \\ & u \le 0, \end{aligned} \tag{10}$$

и пусть $(u_\varepsilon^k, p_\varepsilon^k)$ – приближенное решение этой задачи с точностью $\varepsilon \ge 0$, то есть $f_B(x^k) = \tilde{f}_B^k + \varepsilon = du_\varepsilon^k + x^k p_\varepsilon^k + \varepsilon$.

Заметим, что $f_B(x) \ge du_\varepsilon^k + xp_\varepsilon^k$ для $x \in \operatorname{dom} f_B$, и, следовательно,

$$f_B(x) - f_B(x^k) \ge du_\varepsilon^k + xp_\varepsilon^k - (du_\varepsilon^k + x^k p_\varepsilon^k + \varepsilon) = (x - x^k)p_\varepsilon^k - \varepsilon,$$

то есть $p_\varepsilon^k \in \partial_\varepsilon f_B(x^k)$.

По построению последовательность функций $\{f_B^k(x)\}$ удовлетворяет неравенствам:

$$f_B^k(x) \le f_B^{k+1}(x) \le f_B(x) < +\infty. \tag{11}$$

Неравенство $f_B^{k+1}(x) \le f_B(x)$ покажем по индукции.

$$f_B^{k+1}(x) = \max\{f_B^k(x), \tilde{f}_B^k + p_{\varepsilon_k}^k(x - x^k)\},\ \text{где}\ p_{\varepsilon_k}^k \in \partial_{\varepsilon_k} f_B(x^k).$$

$f_B^0(x) = \max\{-\infty, \tilde{f}_B^0 + p_{\varepsilon_0}^0(x - x^0)\} = f_B(x^0) - \varepsilon_0 + p_{\varepsilon_0}^0(x - x^0)$, где $p_{\varepsilon^0}^0 \in \partial_{\varepsilon^0} f_B(x^0)$. По определению ε-субградиента $f_B(x^0) - \varepsilon_0 + p_{\varepsilon_0}^0(x - x^0) \le f_B(x)$, и значит $f_B^0(x) \le f_B(x)$.

Предполагая, что неравенство $f_B^k(x) \le f_B(x)$ выполняется, имеем

$$f_B^{k+1}(x) = \max\{f_B^k(x), \tilde{f}_B^k + p_{\varepsilon_k}^k(x - x^k)\} \le f_B(x),$$

так как $p_{\varepsilon_k}^k \in \partial_{\varepsilon_k} f_B(x^k)$ и по определению ε-субградиента $\tilde{f}_B^k + p_{\varepsilon_k}^k(x - x^k) \le f_B(x)$. Таким образом показано, что $f_B^{k+1}(x) \le f_B(x)$. Кусочно-линейная аппроксимация $f_B^{k+1}(x)$ использует только ε-отсечения, основанные на использовании ε-субградиентов p_ε^k.

Неравенство (11) обеспечивает сходимость последовательности функций $f_B^k(x)$ к некоторой конечной выпуклой функции $f_B^{\cdot}(x) = \lim_{k\to\infty} f_B^k(x)$.

С другой стороны, для x^k, являющегося решением задачи $\min_x f_A(x) + f_B^{k+1}(x)$, имеем

$$f_B^{k+1}(x^k) = \max\{f_B^k(x^k),\ \tilde{f}_B^k\} \ge f_B(x^k) - \varepsilon_k.$$

Из последнего неравенства и (11) следует, что $f_B(x^k) \ge f_B^{k+1}(x^k) \ge f_B(x^k) - \varepsilon_k$. Тогда для любой предельной точки $x^{\cdot}$ последовательности $\{x^k\}$ $f_B(x^{\cdot}) = f_B^{\cdot}(x^{\cdot})$, поскольку $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

Оптимальность $x^{\cdot}$ следует из цепочки неравенств $f_A(x^{\cdot}) + f_B(x^{\cdot}) = f_A(x^{\cdot}) + f_B^{\cdot}(x^{\cdot}) = \lim_{k\to\infty}\{f_A(x^k) + f_B^{k+1}(x^k)\} \le f_A(x) + f_B^{k+1}(x) \le f_A(x) + f_B(x)$, откуда следует, что $x^{\cdot}$ решает задачу $\min_x\{f_A(x) + f_B(x)\}$.

Аналогично показывается оптимальность произвольной предельной точки $p^{\cdot}$ последовательности $\{p^k\}$. ■

Недостатком теоремы 2 является необходимость решения двойственной задачи (10). Можно воспользозоваться прямо-двойственным симплекс-методом. В этом случае приближенные решения двойственной задачи (10) являются допустимыми для прямой задачи (8), и тогда, являются ε-субградиентами, что следует из доказательства теоремы 2.

Список литературы

[1] Величко, А.С., Нурминский, Е.А. *Опыт декомпозиции метода конечных элементов с использованием теории структурированных оптимизационных задач.* - Электронный журнал “ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ”, 2002, с. 1237-1256. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/113.pdf.

[2] Нурминский, Е.А. *Численные методы выпуклой оптимизации.* М.: Наука, 1991.

[3] Центр коллективного пользования “Дальневосточный вычислительный ресурс” ИАПУ ДВО РАН. http://www.dvo.ru/bbc.

USING EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS IN PARALLEL PRIMAL-DUAL CUTS METHOD FOR BLOCK-ANGULAR PROBLEMS OF LINEAR PROGRAMMING

A.S. Velichko

Institute of Automatics and Control Processes, Vladivostok
e-mail: vandre@dvo.ru

Abstract. In the article the method of dense and ε-cuts construction is exhibited. These cuts are used in parallel decomposition algorithm with primal-dual cuts which is applied for block-angular problems of linear programming. The problem of construction of such cuts is based on exact or ε-subgradients calculation of piecewise linear response functions and is reduced to exact or approximate solving of algorithm subtasks. The convergence of algorithm with ε-cuts is proved.

Key words: decomposition, cut, block-angular, linear, programming, approximate, ε-subgradient