О минимальном наборе отсечений для алгоритма прямо-двойственной декомпозиции

А.С. Величко
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток
e-mail: vandre@dvo.ru

Рассматриваются новые вычислительные результаты в алгоритма прямо-двойственной декомпозиции [1]. Данный подход показал себя особенно эфективным для крупнозернистой декомпозиции двублочных линейных оптимизационных задач на параллельных вычислителях с распределенной памятью.

Суть используемого прямо-двойственного алгоритма для двублочной линейной задачи $\min\{f_1(x) + f_2(x)\}$, где $f_i(x) = \min\{(c_i, z_i) \mid A_i z_i \leq d_i - B_i x\}, i = 1, 2$ состоит в замене функций $f_1(x)$ и сопряженной $f_2^*(p) = h_2(p)$ на свои внешние кусочно-линейные аппроксимации $f_2^k(x) = \max\{f_2^{k-1}(x),\ \bar{p}^k x - h_2(\bar{p}^k),\ p^k x - h_2(p^k)\}$ и $h_1^k(p) = \max\{h_1^{k-1}(p),\ p\bar{x}^k - f_1(\bar{x}^k),\ px^{k+1} - f_1(x^{k+1})\}$, где $f_2^0(x) = h_1^0(p) = -\infty, \bar{p}^k \in \partial f_2(x^k), \bar{x}^k \in \partial h_1(-p^k)$. Здесь $h_1(p)$ – сопряженная для $f_1(x)$ функция. Основные блоки параллельного алгоритма предполагают независимое решение задач $\min\{f_1(x) + f_2^k(x)\}$ и $\min\{h_1^k(-p) + h_2(p)\}$. В практике решения задач большой размерности алгоритм был адаптирован к возникновению несобственных подзадач вычисления субградиентов. Вычисление значений функций $f_B(x), h_A(p)$ и их субградиентов в точках $x^k, -p^k$ позволяет строить новые линейные отсечения, которые уточняют кусочно-линейные аппроксимации $f_2^k(x)$ и $h_1^k(p)$.

Данный алгоритм унаследовал некоторые общие недостатки методов отсечений. Во-первых, по мере улучшения аппроксимации допустимого множества количество отсечений задачи увеличивается, что приводит к росту объема решаемых подзадач с каждым шагом алгоритма. Во-вторых, при решении подзадач алгоритма симплекс-методом необходим допустимый начальный базис, что требует решения вспомогательной задачи линейного программирования. В этом случае в литературе рекомендуется переходить к двойственным постановкам решаемых подзадач. Однако, при параллельной реализации прямо-двойственного алгоритма желательно эффективное решение и прямой и двойственной задач для более равномерного распределения вычислительной нагрузки.

Для устранения этих недостатков необходимо исследовать различные вычислительные стратегии при решении подзадач алгоритма симплекс-методом. Во-первых, можно проводить "досчет" оптимального решения в подзадачах алгоритма, когда в качестве начального допустимого базиса на последующем шаге алгоритма используется оптимальное решение, полученное на предыдущем шаге. Например, это возможно, если допустимое множество подзадачи не изменяется. Стратегия досчета применима не для всех подзадач алгоритма, и это приводит к неравномерному распределению вычислительной нагрузки между параллельно выполняемыми блоками алгоритма.

С другой стороны, при практическом применении алгоритма оказывается, что на каждом шаге только небольшая часть ограничений является активной, то есть данные ограничения выполняются как точное равенство. Значит остальные ограничения могут не учитываться на следующем шаге алгоритма. После получения новых отсечений необходимо сделать проверку используемых отсечений задачи на их "активность" в новом субоптимальном решении. При росте размеров задачи это может дать существенную экономию времени, поскольку размерность базиса задачи значительно уменьшается за счет отбрасывания неактивных ограничений. Такой подход отвечает стратегии выбора минимального набора отсечений.

Применение данных вычислительных стратегий ограничено тем обстоятельством, что они не могут применяться одновременно, поэтому важно исследовать вопрос о сравнительной численной эффективности стратегии выбора минимального набора отсечений. Вычислительные эксперименты для небольших размерностей порядка 200 ограничений на модельной задаче двуэтапного стохастического программирования [2] показывают рост выигрыша с ростом ограничений исходной задачи при использовании стратегии минимального набора отсечений по сравнению с досчетом оптимального решения. Параллельный алгоритм реализован в стандарте передачи сообщений MPI для многопроцессорных вычислительных комплексов.

Работа выполнена по программе Президиума РАН №17.

Литература

[1] *Величко А.С., Нурминский Е.А.* Прямо-двойственная декомпозиция задачи о репликации портфеля рыночных активов // Автоматика и телемеханика. 2004, №2. С. 170-178.

[2] *Величко А.С.* Об алгоритме двойственных отсечений для задачи двуэтапного стохастического программирования // Известия ВУЗов. Математика. 2006, №4. С. 78-81.