О численном решении оптимизационных задач при регуляризации по Тихонову с недифференцируемыми стабилизирующими функционалами

А. С. Величко, к.ф.-м.н.
Владивосток, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
e-mail: vandre@iacp.dvo.ru

В работах Васина В.В., Короткого М.А. [1, 2] рассматривается метод регуляризации Тихонова для решения операторного уравнения $Au = f$. В случае некорректно поставленной задачи при построении устойчивых аппроксимаций для искомого решения необходимо привлечение аппарата регуляризации. Классическая тихоновская регуляризация n-го порядка не позволяет качественно восстановить недифференцируемое решение, поскольку функционалы, содержащие норму пространства Соболева $W_p^n(D)$ обладают сильным регуляризующим эффектом, что приводит к заглаживанию тонкой структуры решения. Использование стабилизирующих функционалов другого типа приводит к необходимости решать оптимизационные задачи с недифференцируемым функционалом.

В качестве примеров использования данного подхода в работах [1, 2] рассматривалось одномерное интегральное уравнения Фредгольма $\int\limits_a^b K(t,s)u(s)\,ds = y(t)$, для которого формировалась задача безусловной недифференцируемой оптимизации

$$\min_{u_j}\Big\{\sum_{i=1}^{m} h\Big(\sum_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i\Big)^2 + \alpha\sum_{j=1}^{n} hu_j^2 + \alpha\sum_{j=1}^{n-1}|u_{j+1}-u_j|\Big\}, \quad (1)$$

здесь и далее для краткости обозначений $u_j = u(s_j), y_i = y(t_i)$.

Использование другого стабилизирующего функционала приводит к оптимизационной задаче

$$\min_{u_j}\Big\{\max_{i=\overline{1,m}}\Big|\sum_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i\Big| + \alpha\Big(\sum_{j=1}^{n} hu_j^2 + \max_{j=\overline{1,n}}|u_j| + \max_{i\neq j}\frac{|u_i-u_j|}{|s_i-s_j|^{\mu}}\Big)\Big\}, \quad (2)$$

где h – фиксированный шаг прямоугольной сетки, α – малый параметр регуляризации, μ - параметр стабилизирующего функционала.

Альтернативой применения специальных методов негладкой оптимизации для решения задач (1),(2) может служить их эквивалентное преобразование к задачам условной оптимизации, для которой существуют эффективные численные методы поиска решения. Для задачи (1) это можно сделать введением новых неотрицательных переменных $v_j = |u_{j+1} - u_j|$ и ограничений вида $v_j \geq u_{j+1} - u_j, v_j \geq -(u_{j+1} - u_j), v_j \geq 0$. Тогда заменяя в (1) последнее слагаемое на $\alpha \sum\limits_{j=1}^{n-1} v_j$ и добавляя указанные ограничения на переменные v_j, получим эквивалентную квадратичную задачу условной оптимизации с линейными ограничениями.

Для задачи (2) введением скалярных неотрицательных переменных v_1, v_2, v_3, получим задачу $\min\Big(v_1 + \alpha h \sum\limits_{j=1}^{n} u_j^2 + \alpha v_2 + \alpha v_3\Big)$, и

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} hK(t_i, s_j)u_j - y_i\Big| \leq v_1 \ \forall i, |u_j| \leq v_2 \ \forall j, \frac{|u_i - u_j|}{|s_i - s_j|^{\mu}} \leq v_3 \ \forall i \neq j,$$

где $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Далее можно заменить каждое из ограничений на две группы неравенств аналогично предыдущей задаче. Данный прием не является универсальным, а обусловлен наличием задачи именно на минимум оптимизируемого функционала.

В численных расчетах ядро $K(t, s)$ уравнения Фредгольма выбиралось в виде $\frac{H}{(t-s)^2 + H^2}$, модельные решения были представлены функциями $u(s) = (1 - s^2)^2$ и $u(s) = 1 - |s|$. Значения правой части y брались не с использованием решения интегрального уравнения, а по аппроксимационной формуле, значения u_j брались по точной функции в узлах сетки. Для численного решения использовался солвер промышленного уровня MINOS-4.0. Для 50 узлов сетки по аргументу функции u решение задачи было найдено методом сопряженных градиентов за 74 итерации. Однако, степень "восстановления" функции u сильно зависит от величины параметра H ядра K и параметра регуляризации α, который выбирался равным 10^{-6}.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума № 14.

[1] *Васин В. В.* Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // ДАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.

[2] *Vasin V. V., Korotkii M. A.* Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functionals // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2007. Vol. 15, № 8. p. 853–865.