

На правах рукописи



Завертан Александр Викторович

ЛУЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В  
КАЧЕСТВЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО СРЕДСТВА ВЫДЕЛЕНИЯ  
РАЗРЫВОВ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Владивосток – 2012

Работа выполнена во Владивостокском государственном университете экономики и сервиса

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук., профессор,  
член-корреспондент РАН  
Буренин Анатолий Александрович.

Официальные оппоненты: *Олейников Александр Иванович*,  
доктор физ.-мат. наук, профессор,  
Комсомольский-на-Амуре государственный  
технический университет,  
заведующий кафедрой механики  
и анализа конструкций и процессов;  
*Семенов Кирилл Тихонович*,  
кандидат физ.-мат. наук,  
Институт автоматизации и процессов управления  
Дальневосточного отделения РАН,  
старший инженер-программист.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет»

Защита состоится 30 мая 2012 г. в 13<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета ДМ005.007.02 при Институте автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН по адресу: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5, аудитория 510.

Тел./факс: (8-423)2-310-452, e-mail: dm00500702@iacp.dvo.ru

URL: <http://www.iacp.dvo.ru>

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН.

Автореферат разослан 28 апреля 2012 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат физ.-мат. наук



Дудко Ольга Владимировна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Создание и развитие математического и алгоритмического аппарата современной динамики деформирования относят к одной из основных задач фундаментальной механики. Нестационарный процесс распространения деформаций вследствие импульсного или ударного граничного воздействия на деформируемые тела необходимо сопровождается нелинейными эффектами возникновения и движения в них поверхностей разрывов. Такие поверхности могут быть поверхностями разрывов деформаций (напряжений, скоростей, плотности) и их называют ударными волнами, или разрывными на них оказываются производные от деформаций по времени и пространственным координатам, тогда их называют слабыми или звуковыми волнами. За счет особенностей послеударного воздействия и изменения геометрии таких поверхностей величины разрывов могут уменьшаться (затухание), а могут увеличиваться (рост интенсивности). Скорости продвижения слабых волн зависят наряду с механическими свойствами сред еще и от предварительных деформаций, а скорости ударных волн – еще и от величины (интенсивности) разрывов деформаций. Отмеченные эффекты являются как раз принципиально нелинейными. К таковым относятся и число возникающих поверхностей разрывов, и число компонент тензора градиента перемещений, претерпевающих разрыв. При создании алгоритмов и программ расчетов все сведения подобного рода необходимо учитывать в качестве основополагающих краевых условий. Именно учет этих и других подобных эффектов вызывает в динамике деформирования подчас труднопреодолимые сложности. Необходимо заметить, что в газовой динамике, которая в отличие от динамики деформирования изначально развивалась в форме нелинейной теории, большинство отмеченных трудностей преодолено. В частности, разработаны алгоритмы выделения разрывов на каждом временном шаге расчетов. Связано это с тем, что в газе присутствуют только деформации изменения объема, в то время как в деформируемых телах – еще и деформации изменения формы. В процессе распространения ударных волн присутствует нелинейный эффект взаимовлияния объемных деформаций на сдвиговые и наоборот, возникающие разрывы оказываются комбинированными, скорости их продвижения – трудно сравнимаемыми. Из-за этого алгоритмы выделения разрывов, зарекомендовавшие себя в газовой динамике, оказываются неприменимыми в динамике деформирования.

При численных расчетах в динамике деформирования вследствие отмеченных трудностей оказались популярными методы сквозного счета. Последние основаны на размывании разрывов за счет введения вязких свойств в модель, либо эффекта искусственной вязкости в алгоритм расчетов. Однако

встречаются случаи, когда подобные расчеты могут нести не только количественные погрешности, но и не отражать качественные стороны рассчитываемых явлений. Таким образом, возникает необходимость в алгоритмах, отслеживающих положения поверхностей разрывов на каждом шаге расчетов с вычислением их интенсивностей, а также изменения интенсивностей при взаимодействии ударных волн между собой и с преградами. Предлагаемый способ выделения разрывов, основанный на использовании в конечно-разностных алгоритмах специально построенных асимптотических лучевых разложений решений, представляется одной из немногих возможностей отказаться от схем сквозного счета. Убеждены, что для современной вычислительной динамики это является **актуальным**.

**Целью** настоящей диссертационной работы является разработка алгоритмов расчетов существенно нестационарных задач динамики деформирования с выделением разрывов путем использования в численных схемах специально построенных прифронтных лучевых разложений решений; решение новых задач ударного деформирования нелинейных упругих сред.

К **основным результатам** диссертации отнесем:

- указание условий возникновения плоскополяризованных ударных волн нагрузки (квазипродольных и квазипоперечных) и нейтральных ударных волн (волн круговой поляризации) в одномерном плоском и цилиндрическом случаях;
- развитие лучевого метода построения приближенных решений для случая наличия предварительных деформаций и пространственной близости поверхностей разрывов, для случая криволинейных и расходящихся лучей;
- создание алгоритмов расчетов в динамике нелинейных упругих сред, выделяющих на каждом временном шаге положение поверхности разрывов с расчетом интенсивностей разрывов за счет включения в схему расчетов прифронтных лучевых разложений решений.

**Научная новизна** результатов диссертационной работы определяется

- уточненными постановками краевых задач нелинейной динамической теории упругости за счет указания возможности распространения в несжимаемой упругой среде одномерных цилиндрических ударных волн, несущих плоскую поляризацию (волны нагрузки) и круговую поляризацию (нейтральные волны);
- построением новых лучевых разложений за фронтами разрывов деформаций и приближенных решений краевых задач нелинейной динамической теории упругости при малых послеударных временах;

- предложением алгоритмов расчетов с использованием в них лучевых прифронтных разложений для целей выделения разрывов на каждом временном шаге и вычисления интенсивностей разрывов;
- приближенным решением, включая численные расчеты, новых краевых задач динамики деформирования.

**Достоверность результатов диссертации** обоснована использованием общепринятых подходов механики деформирования, рекуррентных условий совместности разрывов, применением классических схем расчетов и тестированием программ расчетов на известных простейших решениях задач динамики упругой среды.

**Практическая значимость** результатов диссертационной работы продиктована широким использованием в технологической практике приемов изготовления и упрочнения изделий за счет импульсных и ударных воздействий на материалы. Математическое моделирование таких технологических процессов призвано оптимизировать их режимы и добиться улучшенных свойств изделий.

**Апробация результатов диссертации.** Отдельные результаты работы докладывались и обсуждались на Всероссийской математической школе-семинаре имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2007 и 2008), семинарах лаборатории механики деформируемого твердого тела Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН. Диссертация в целом докладывалась на Всероссийской математической школе-семинаре имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2010), на семинаре ИАПУ ДВО РАН (2012).

**Публикации по работе.** По теме диссертации опубликовано 10 работ, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 169 наименований. Общий объем работы 127 страниц, в том числе 27 рисунков, включенных в текст.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение к диссертационной работе содержит обзор литературы, связанной с нелинейной динамикой деформирования. Основное внимание уделено развитию, начиная с 70-х годов прошлого столетия, нелинейной динамической теории упругости. Обсуждаются приближенные методы решения краевых задач динамики ударного деформирования. Среди последних главное место отведено лучевому методу построения разложений решений за фронтами разрывов. При этом отмечен значительный вклад отечественных ученых:

Алексеева А.С., Бабича В.М., Бестужевой Н.П., Булдырева В.С., Буренина А.А., Быковцева Г.И., Вервейко Н.Д., Власовой И.А., Дуровой В.Н., Зиновьева П.В., Куликовского А.Г., Молоткова И.А., Подильчука Ю.Н., Россихина Ю.А., Рубцова Ю.К., Свешниковой Е.И., Филатова Г.Ф., Чугайновой А.П., Шитиковой М.В. Обсуждаются работы зарубежных ученых Achenbach D., Reddy D., Sun C., Truesdell C. и др.

Должное внимание уделено развитию численных методов решения краевых задач динамики деформирования, отмечаются заслуги в этом таких отечественных ученых, как Баженов В.Г., Бураго Н.Г., Игумнов Л.А., Коробейников С.Н., Коротких Ю., Кукуджанов В.А., Садовский В.М. Здесь же приведено обоснование актуальности работы, а также представлено содержание диссертации по главам.

В первой главе рассматривается модель нелинейно-упругой среды, определяются возможные типы возникающих в такой среде ударных волн и их кинематика, приводятся необходимые соотношения на поверхностях сильных разрывов. Дается общее описание применения лучевого метода для решения динамических задач теории упругости.

В качестве модельной принимается система уравнений, выражающая законы сохранения в случае адиабатического приближения для гиперупругой среды. В переменных Эйлера эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \quad \dot{\rho} + (\rho v_i)_{,i} = 0, \quad \sigma_{ij,j} = \rho (\dot{v}_i + v_j v_{i,j}), \\ v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ki}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha_{jk}$  - тензор деформации Альманси,  $u_i$  - компоненты вектора перемещения точки среды,  $\rho, \rho_0$  - плотность среды и ее плотность в свободном состоянии,  $v_i$  - компоненты вектора скорости точки. Для изотропной среды упругий потенциал (плотность распределения внутренней энергии)  $W = W(\alpha_{ij})$  является функцией инвариантов тензора деформаций:  $W = W(I_1, I_2, I_3)$ , где  $I_1 = \alpha_{ii}$ ,  $I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}$ ,  $I_3 = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}$ . Далее для  $W(I_1, I_2, I_3)$  принимаем разложение в ряд по степеням аргументов. Для сжимаемой нелинейно-упругой среды

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \dots \quad (2)$$

Здесь  $\lambda, \mu, l, m, n$  - упругие модули среды, при этом  $\lambda, \mu$  отождествляем с параметрами Ламе.

Для несжимаемой среды независимых инвариантов остается два -  $I_1$  и  $I_2$ , но неизвестной оказывается функция добавочного гидростатического давле-

ния  $p$ . Тогда формула Мурнагана приобретает форму

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ki}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ W &= (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + \dots\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь  $\mu$  – модуль сдвига,  $a$ ,  $b$ ,  $\kappa$ ,  $\theta$  – упругие модули более высокого порядка.

Математическая модель нелинейного упругого тела является простейшей моделью деформируемого твердого тела, в которой проявляются нелинейные эффекты, отражающие качественные стороны процесса динамики деформирования. Очевидно, что учет пластических или сложных реологических свойств среды внесет свои новые закономерности для процесса. Однако и в этих случаях закономерности, найденные в рамках упругой модели, будут иметь место, являясь в таком смысле общими. Этим продиктован выбор в рамках диссертации для описания существенно нестационарного процесса деформирования модели упругого тела.

Исходя из динамических

$$\begin{aligned}[\rho(v_i \nu_i - G)] &= 0, \quad [\sigma_{ij}] \nu_j = \rho^+ (v_j^+ \nu_j - G) [v_i], \\ \sigma_{ij}^+ [v_i] \nu_j &= \rho^+ (v_j^+ \nu_j - G) \left( \frac{[v_i][v_i]}{2} - [e] \right) - [q_j] \nu_j,\end{aligned}\quad (4)$$

кинематических

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{\delta [f]}{\delta t} - G [f, i] \nu_i \quad (5)$$

и геометрических

$$[f, i] = [f, j] \nu_i \nu_j + a^{\alpha\beta} [f]_{, \beta} x_{i, \alpha} \quad (6)$$

условий совместности разрывов, вычисляются скорости  $G$  продвижения возможных поверхностей разрывов деформаций (ударных волн), указываются механические свойства возникающих ударных волн, как в несжимаемой упругой среде, так и в сжимаемой. В (4)-(6) квадратными скобками обозначены разрывы величин, заключенных в скобки ( $[f] = f^+ - f^-$ ), знаки "+" и "-" соответствуют значениям разрывных величин, вычисленных перед поверхностью  $\Sigma$  и сразу за  $\Sigma$ ;  $x_i$ ,  $y^\alpha$  – пространственные и поверхностные координаты точек  $\Sigma$ ;  $\nu_i$  – компоненты единичной нормали к  $\Sigma$ , направленной в сторону ее распространения;  $a^{\alpha\beta}$  – компоненты поверхностной метрики;  $\frac{\delta}{\delta t}$  – операция дифференцирования по времени в данной точке  $\Sigma$  (дельта-производная). В случае одномерных плоских и цилиндрических волн, распространяющихся по несжимаемой упругой среде, показано существование двух типов ударных волн: плоскополяризованных волн нагрузки, увеличивающих скачкообразно предварительный сдвиг без изменения его направленности, и волн круговой поляризации, скачкообразно меняющих только

направленность предварительного сдвига. В случае сжимаемой среды на такие механические свойства накладывается возможность изменения на волнах нагрузки объемных деформаций и существование квазипродольной ударной волны. Данные сведения необходимы при постановке конкретных краевых задач.

В последнем параграфе первой главы излагается существо лучевого метода построения приближенных решений. Как раз последние окажутся необходимыми для целей выделения положений поверхностей разрывов и вычисления интенсивностей разрывов. Такие приближенные решения, являясь, по существу, асимптотическими прифронтowymi разложениями точных решений, могут быть представлены в форме

$$u_i(s, t) = u_i^+ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \omega_i^{(k)} (t - t_{\Sigma})^k, \quad t_{\Sigma} = \int_0^s \frac{d\xi}{G(\xi)}, \quad \omega_i^{(k)} = \left[ \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right] \Big|_{t=t_{\Sigma}}. \quad (7)$$

Здесь  $s$  – лучевая координата,  $t_{\Sigma}$  – время прихода граничного возмущения в точку с лучевой координатой  $s$ . Поскольку в результате динамического воздействия на среду могут возникать несколько поверхностей разрывов  $\Sigma$ , то соотношения вида (7) следует записать на каждой из них. Когда деформируемая среда полагается линейной, или поверхность разрывов – слабой, то для коэффициентов  $\omega_i^{(k)}$  из уравнений движения, записанных в разрывах, следуют рекуррентным образом обыкновенные дифференциальные уравнения (уравнения затухания). Из-за зависимости скоростей продвижения ударных волн от их интенсивностей для них ситуация изменяется. В этом случае приходится использовать разложение  $\omega_i^{(1)}$  в степенной ряд по времени и только на такой основе связывать  $\delta$ -производные  $\omega_i^{(1)}$  с  $\omega_i^{(k)}$ . В работе рассматривается данный, более сложный, случай.

Вторая глава диссертации посвящена построению прифронтowych лучевых разложений в простейших случаях для целей использования последних в алгоритмах численного расчета для указания положения ударных волн и вычисления величины разрыва.

Рассмотрим несжимаемую среду, заполняющую полупространство с плоской границей. Введем декартову прямоугольную систему координат, направив ось  $Ox_1$  внутрь среды ортогонально границе, а оси  $Ox_2$  и  $Ox_3$  расположив в граничной плоскости. Пусть вследствие ударного воздействия граница полупространства в некоторый момент времени  $t = 0$  начала двигаться по закону:

$$u_2 = g_1 t + \frac{g_2}{2} t^2, \quad u_1 = u_3 = 0, \quad g_1 \neq 0, \quad (8)$$

где  $u_i$  – компоненты вектора перемещения точки среды,  $g_{1,2} - const$ . Условие, накладываемое на коэффициент  $g_1$ , необходимо для того, чтобы в начальный



момент времени от граничной плоскости отделилась ударная волна нагрузки  $\Sigma$ . Эта волна играет роль подвижной границы области деформирования. В силу одномерного характера движения среды поверхность разрывов далее обязана оставаться плоской.

Приближенное решение задачи, построенное с помощью лучевого метода для малых значений  $t$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} u_2 &= - \left( \chi_{10} + \gamma \frac{\chi_{10}^2}{C^2} \chi_{20} t_\Sigma \right) (t - t_\Sigma) - \frac{1}{2} \chi_2 (t - t_\Sigma)^2 - \dots, \\ t_\Sigma &= \frac{x}{C} \left( 1 - \frac{\gamma \chi_{10}^2}{2 C^2} \right) + \dots, \quad x_\Sigma = Ct \left( 1 + \frac{\gamma \chi_{10}^2}{2 C^2} \right) + \dots, \\ \chi_{10} &= -g_1, \quad \chi_{20} = -g_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Численное решение в области деформирования будем строить с помощью конечно-разностного метода на регулярной сетке. Замыкание системы разностных уравнений в окрестности подвижной границы области деформирования, в качестве которой выступает ударная волна, выполняется с помощью лучевого разложения. Лучевые ряды позволяют выразить значения перемещений в узлах, расположенных в окрестности ударной волны. Разностные уравнения здесь неприменимы вследствие необходимости располагать все узлы разностного шаблона в области деформирования. Входящие в разложения неизвестные параметры, в свою очередь, могут быть получены на основе интерполирования и последующего анализа решения в узлах сетки, расположенных в окрестности волнового фронта, что наряду с условием на нагружаемой границе и условиями на  $\Sigma$  позволяет замкнуть систему. Интерполирование выполняется по узлам последнего временного слоя, при этом удастся определить на  $\Sigma$  производные по пространственной координате  $u_{2,1}$ ,  $u_{2,11}$ , и, соответственно, величины их разрывов. Далее с помощью кинематических условий совместности определяется интенсивность второй производной по времени  $\chi_2$ , что, в свою очередь, позволяет определить параметр  $\chi_1$ . Для этого выражение его  $\delta$ -производной рассматривается как дифференциальное уравнение относительно  $\chi_1$  и решается методом Рунге.

Случай ударного нагружения несжимаемого плоского слоя, содержащего предварительные деформации, интересен тем, что позволяет получить две близко расположенные поверхности разрывов – плоскополяризованную волну  $\Sigma_1$  и следующую за ней волну круговой поляризации  $\Sigma_2$ . Для этого рассмотрим массив среды в виде слоя толщины  $H$ . Введем прямоугольную декартову систему координат таким образом, чтобы уравнения граничных плоскостей приняли вид  $x = 0$  и  $x = H$ . Определим начальное деформированное состояние, задав компоненты вектора перемещений:  $u_1 = u_3 = 0$ ,  $u_2 = S(x - H)$ ,

где  $S$  – константа. Условие нагружения зададим в виде

$$u_1 = 0, \quad u_2 = S(x - H) + v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2, \quad u_3 = v_3 t + \frac{1}{2} a_3 t^2, \quad (10)$$

причем  $v_2 \neq 0$ ,  $v_3 \neq 0$ . Таким образом, рассматривается случай, когда в начальный момент времени от граничной плоскости отделяются две плоскости разрывов деформаций: более быстрая плоскополяризованная ударная волна  $\Sigma_1$  и более медленная волна поворота  $\Sigma_2$ .

Наличие второй волны приводит к необходимости строить решения задачи в двух областях деформирования и сращивать их на  $\Sigma_2$ . Тем не менее, в силу близости величин скоростей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , размер межфронтальной области деформирования оказывается достаточно мал, и, следовательно, приближенное аналитическое решение в ней обладает приемлемой точностью. Последний факт позволяет связать с его помощью интенсивности разрывов на  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  таким образом, что в целом построение разностной схемы сводится к рассмотренному ранее случаю.

Подобным образом дело обстоит и с задачей о нормальном ударе по плоской границе сжимаемого упругого полупространства, основными особенностями которой являются необходимость учета перемещения нагружаемой границы, а также более сложная структура уравнений движения, несколько усложняющая разностную схему.

Задача о косом ударе с продольной и квазипоперечной ударными волнами  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  позволяет рассмотреть случай существования двух областей деформирования с общей границей  $\Sigma_2$ , в каждой из которых необходимо строить численное решение. Сращивание решений на  $\Sigma_2$  производится за счет выполнения на  $\Sigma_2$  условий совместности и их следствий на квазипоперечной волне, а также анализом лучевых рядов за  $\Sigma_2$  и продолжений решения из межфронтальной области.

Численные решения осесимметричных задач об антиплоском и скручивающем нагружении, прикладываемом на границе бесконечной цилиндрической полости, строятся аналогично. Их особенностью является эффект быстрого изменения интенсивностей разрывов за счет уменьшения со временем кривизны фронта. Этот эффект позволяет уже при достаточно малых временах получить решение, значительно отличающееся от построенного на основе приближенных лучевых разложений в начальный момент времени.

Была проведена серия вычислительных экспериментов для нелинейно-упругих сред с различными модулями. На рис. 1,2 представлено распределение перемещений за цилиндрическими ударными волнами для антиплоского (рис. 1) и скручивающего (рис. 2) удара.

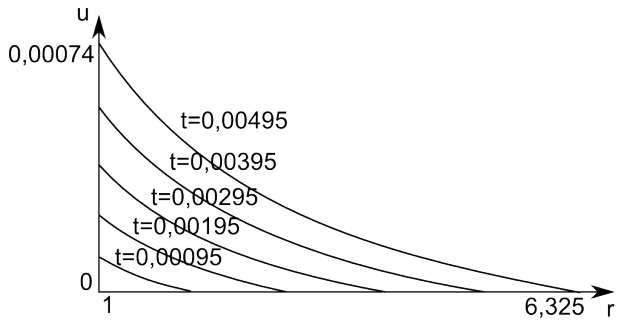


Рис. 1: поля перемещений при анти-плоском деформировании в различные моменты времени

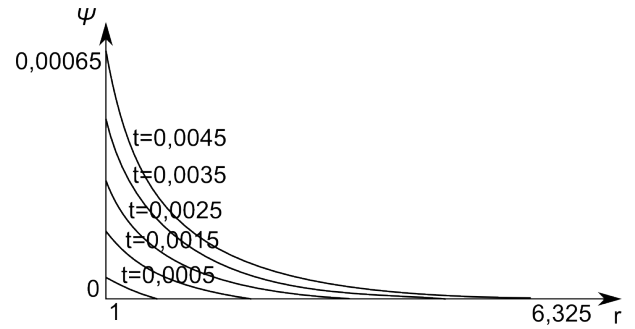


Рис. 2: поля перемещений при скручивающем деформировании в различные моменты времени

Третья глава посвящена обобщению рассматриваемой численно-аналитической схемы на случай плоских задач.

Пусть несжимаемая упругая среда занимает пространство с вырезанной в нем бесконечной цилиндрической полостью  $\Lambda_0$ . Для определенности направляющей кривой цилиндрической поверхности, являющейся границей полости, принимаем эллипс  $L_0$ .

Введем декартову прямоугольную систему координат таким образом, что оси  $x_1$  и  $x_2$  совпадают с осями  $L_0$ , а ось  $x_3$  направлена параллельно образующим границы. Пусть движение среды вызвано нагрузкой, действующей на ее граничной поверхности и вызывающей перемещение точек границы по квадратичному закону с начальной скоростью  $v_0$  и ускорением  $a_0$ .

Закон движения среды в данном случае имеет вид

$$u_{,11} (1 + \alpha (5u_{,1}^4 + 6u_{,1}^2 u_{,2}^2 + u_{,2}^4)) + u_{,22} (1 + \alpha (u_{,1}^4 + 6u_{,1}^2 u_{,2}^2 + 5u_{,2}^4)) + 8\alpha u_{,12} u_{,1} u_{,2} (u_{,1}^2 + u_{,2}^2) = \frac{\ddot{u}}{C^2}, \quad (11)$$

$$u(x_1, x_2, t) = u_3(x_1, x_2, t), \quad \alpha = \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{\theta - b}{\mu} \right).$$

В начальный момент времени от нагружаемой поверхности отделяется цилиндрическая поверхность разрывов  $\Sigma$ , на которой терпят разрыв производные функции  $u$ , но при этом выполняются геометрические, кинематические и динамические условия совместности разрывов. В силу независимости  $u$  от  $x_3$  ударная волна будет оставаться цилиндрической поверхностью с параллельными оси  $Ox_3$  образующими. Таким образом, положение  $\Sigma$  полностью определяется ее направляющей кривой в плоскости  $x_1 O x_2$ .

Как и ранее, решение в прифронтной области ищем в форме лучевого ряда вида

$$u = - \left( \omega_{10} + \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} t \right) (t - t_\Sigma) - \frac{\omega_{20}}{2} (t - t_\Sigma)^2 - \dots \quad (12)$$

Для координат точки на  $\Sigma$  и лучевой координаты  $s$  имеем

$$\begin{aligned} x_i(y, t) &= f_i(y) + \left( C\nu_{i0} + \frac{8\alpha\omega_{10}^4}{3C^3} \right) t + \\ &+ \left( C \frac{\delta\nu_{i0}}{\delta t} \left( 1 + \frac{3\alpha\omega_{10}^4}{8C^4} \right) + \frac{3\alpha\omega_{10}^3}{2C^3} \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} \nu_{i0} \right) \frac{t^2}{2} + \dots \\ s &= C \left( \left( 1 + \frac{3\alpha\omega_{10}^4}{8C^4} \right) t + \frac{3\alpha\omega_{10}^3}{2C^3} \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} \frac{t^2}{2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $y$  – заданный вдоль  $L_0$  параметр,  $f_i(y)$  – декартовы координаты точки на  $L_0$ ,  $\omega_{10}$  и  $\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}$  – начальные значения  $[i]$  и ее  $\delta$ -производной, которые в данном случае являются функциями  $y$ .

Наличие криволинейных (цилиндрических) поверхностей нагружения и разрывов влечет необходимость задания их образующих, а также распределенных на них параметров. В качестве инструмента для этих целей используются кубические сплайны. Интерполяционные полиномы этого типа обладают, в частности, достаточной гладкостью для вычисления геометрических параметров волновых фронтов, входящих в  $\delta$ -производные интенсивностей разрывов.

Главной трудностью при разработке численной схемы в данной задаче оказывается необходимость сращивания численного решения из прифронтной области, заданного на разностной сетке, и распределений параметров лучевых рядов вдоль волнового фронта, определяемых значениями в узлах сплайнов. Эта задача решена путем интерполирования решений из области численного счета на каждой итерации в окрестности каждого сегмента границы с последующим сопоставлением коэффициентов интерполяционных полиномов и параметров в узлах сплайнов.

На рис. 3 показаны линии одинакового уровня в перемещениях точек среды, причем верхняя кривая указывает положение поверхности разрывов. Перемещения на ней равны нулю и растут с приближением к нагруженной границе. Изменение в интенсивности разрыва  $\omega_1 = \left[ \frac{\partial v_3}{\partial t} \right]$  с изменением координаты  $y$  вдоль поверхности разрывов иллюстрирует рис. 4 ( $y = 0$  при  $x_1 = 0$ ,  $y = 1$  при  $x_2 = 0$ ).

Последний параграф третьей главы посвящен особенностям построения алгоритмов выделения разрывов с помощью использования прифронтных лучевых разложений для случая, когда направляющий контур цилиндрической границы среды является незамкнутым. Полагаем его симметричным относительно некоторой прямой (ось  $Oy$ ), а на удалении от этой прямой, где его кривизна стремится к нулю, представляем прямой линией. Таким образом, на

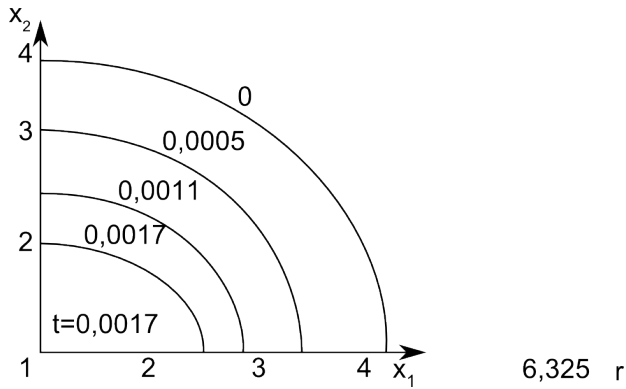


Рис. 3: Линии уровня поля перемещений

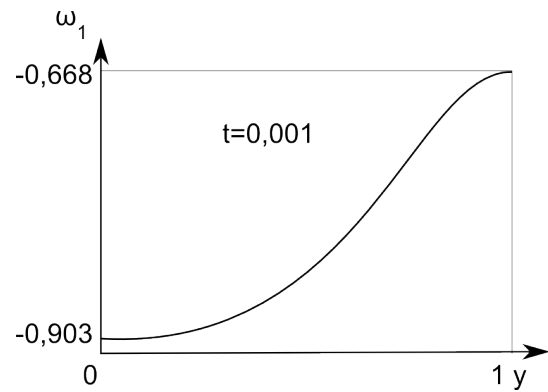


Рис. 4: Изменение  $\omega_1$  вдоль  $\Sigma$

таким удалении имеем краевую задачу о косом ударе, которая была рассмотрена ранее. Следовательно, необходимо срастить численно такое решение с тем, что будет получено для областей среды, примыкающих к границе с ненулевой кривизной.

Считаем, что вследствие ударной нагрузки граничные точки среды начинают движение по известному закону. При этом в начальный момент движения от границы  $L$  отделяются две ударные волны  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Непосредственно в момент  $t_0$  обе эти волны совпадают с  $L$ , и, соответственно, могут рассматриваться как результат срачивания криволинейного и прямолинейного участков. В процессе распространения ударных волн в среде геометрия криволинейных участков фронтов изменяется, что приводит к необходимости срачивания лучевых систем координат.

В качестве инструмента для нахождения численного решения задачи в областях деформирования используется конечно-разностный метод. Для целей выделения разрывов используются построенные лучевым методом приближенные аналитические решения в окрестностях фронтов ударных волн. Решение одномерной задачи о косом ударе строится для замыкания системы со стороны открытой границы. Параметры волновых фронтов на каждом временном шаге схемы пересчитываются с использованием значений перемещений в узлах разностной сетки, расположенных достаточно близко к поверхностям разрывов, путем интерполирования решения в них и последующего сопоставления интерполяционных полиномов с лучевыми рядами. Необходимые для этих целей значения  $t_\Sigma$  и лучевой координаты  $y$  вычисляются однократно для каждого узла сетки в момент прохождения волны через него и далее используются в вычислениях.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Известный результат о существовании в случае плоских одномерных ударных волн двух типов плоскостей разрывов – ударной волны нагрузки (плоскополяризованный разрыв) и нейтральной ударной волны (волны круговой поляризации) – распространен на случай одномерных цилиндрических поверхностей разрывов.
2. Предложен способ построения прифронтных лучевых разложений, приспособленных для целей использования в алгоритмах численных расчетов с выделением разрывов.
3. Указаны особенности построения лучевых разложений и их использования в конечно-разностных расчетах в случаях близко и далеко отстоящих друг от друга поверхностей разрывов.
4. Предложены алгоритмы расчетов краевых задач ударного деформирования в случае криволинейных и расходящихся лучей.
5. Разработанная методика расчетов перенесена на случай разных лучевых сеток за последовательно движущимися поверхностями разрывов деформаций.
6. Указанные вычислительные приемы продемонстрированы численным решением ряда задач нелинейной динамической теории упругости с ударными волнами.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Герасименко Е.А., Завертан А.В., Рагозина В.Е. Лучевые разложения в аналитических и численно-аналитических расчетах задач ударного деформирования // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. 2008. №2. С. 38-51.
2. Герасименко Е.А., Завертан А.В. Расчеты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1. №3. С. 46-56.
3. Герасименко Е.А., Завертан А.В., Рагозина В.Е. Об использовании прифронтных лучевых разложений в динамике деформирования // ПММ. 2009. №2. С. 282-288.
4. Герасименко Е.А., Завертан А.В. Лучевые прифронтные разложения решений в качестве средства выделения разрывов в численных расчетах динамики деформирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. №4. С. 1-12.

5. Завертан А.В. Численное моделирование в задаче об ударном нагружении упругого полупространства, не имеющего предварительных деформаций // Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по математическому моделированию (9–11 декабря 2003, Владивосток). Владивосток: Изд-во ИПМ ДВО РАН, 2003. С. 8-9.
6. Завертан А.В., Зиновьев П.В. Конструирование неявной конечно-разностной схемы расчета с целью выделения поверхности разрывов деформаций в полупространстве. // Сборник докладов региональной научно-технической конференции «Молодежь и научно-технический прогресс», 27-30 апреля, 2004 г., Владивосток. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2004. Ч. 1. С. 173-174.
7. Завертан А.В., Зиновьев П.В. К проблеме выделения разрывов деформаций в динамических задачах ударного деформирования // Сборник тезисов докладов Дальневосточной математической школы-семинара им. ак. Золотова, 6-11 сентября, 2004 г., Владивосток. Владивосток: ДВГУ, 2004. С. 101-102.
8. Zaveratan A.V. Numerical modeling in a problem about shock loading the elastic flat layer having preliminary deformations // Sixth International Young Scholars' Forum of the Asia – Pacific Region Countries, 27 – 30 September, 2005, Vladivostok, Russia. Part 1. Vladivostok : FENTU, 2005. P. 140
9. Завертан А.В., Зиновьев П.В. Построение численных решений в динамических задачах об ударном нагружении упругого полупространства. // Современные проблемы механики и прикладной математики : Сборник трудов международной школы-семинара. Часть I. 12-17 сентября, 2005, Воронеж. Воронеж : Воронежский государственный университет, 2005. – С. 146-148.
10. Завертан А.В., Зиновьев П.В. Расчет ударного деформирования с выделением разрыва. // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород, 22 – 28 августа 2006 С. 91-92.
11. Завертан А.В., Зиновьев П.В. Конструирование численной схемы решения в задаче о распространении ударных волн в упругой среде. // Научная конференция «Вологдинские чтения». Естественные науки. Материалы конференции. Владивосток: Издательство ДВГТУ, Владивосток, 2006. С. 45-46.

**Личный вклад автора.** Работы [5], [8] выполнены автором лично. В работах [1-4], [6-7], [9-11] автор участвовал в постановке задач, разработке алгоритмов решения и выполнял все необходимые вычисления.

ЗАВЕРТАН АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ

ЛУЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В  
КАЧЕСТВЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО СРЕДСТВА ВЫДЕЛЕНИЯ  
РАЗРЫВОВ

Автореферат

Подписано к печати 27.04.2012.

Усл. п.л. 1

Уч.-изд. л. 0.7

Формат 60×84/16

Тираж 100.

Заказ 33.

---

Издано ИАПУ ДВО РАН. Владивосток, Радио, 5.

Отпечатано участком оперативной печати ИАПУ ДВО РАН

Владивосток, Радио, 5.