На правах рукописи

ГЕРАСИМЕНКО Екатерина Андреевна

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЛУЧЕВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток – 2007

Работа выполнена в Институте автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Буренин Анатолий Александрович.

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Гузев Михаил Александрович;

кандидат физико-математических наук, доцент
Зиновьев Павел Владимирович.

Ведущая организация: Воронежский государственный университет.

Защита состоится « » мая 2007 года в   часов   минут на заседании диссертационного совета ДМ 005.007.02 в Институте автоматики и процессов управления ДВО РАН по адресу: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5, аудитория 510,
тел./факс(8-4232) 310452,   E-mail: dm00500702@iacp.dvo.ru,
URL: http://www.iacp.dvo.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института автоматики и процессов управления ДВО РАН.

Автореферат разослан «____» апреля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук Дудко О.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Нестационарные задачи динамики деформирования в своей основе являются принципиально нелинейными, поскольку с необходимостью сопровождаются таким нелинейным эффектом, как возникновение и распространение поверхностей разрывов деформаций (ударных волн). Следовательно, для таких задач необходим соответствующий математический аппарат. Для деформируемых твердых тел, в отличие от газовой динамики, ситуация еще более усложняется необходимостью изучения двух взаимодействующих процессов распространения граничных возмущений: распространения объемных деформаций и деформаций изменения формы. Развитие приближенных методов имеет здесь, наряду с их самоценностью, еще и важное значение в качестве алгоритмической основы численных исследований. Эти обстоятельства предопределяют *актуальность* исследования, проведенного в диссертации, поскольку в нем развивается аналитический метод построения разложений решений за поверхностями разрывов, называемый лучевым методом.

Лучевой метод основывается на теории условий совместности разрывов. Эти ограничения на возможные разрывы диктуются законами сохранения, геометрией и кинематикой движущейся по деформированной среде поверхности разрывов. На наличие геометрических и кинематических ограничений на возможные разрывы указывал еще Дж. Адамар, Т. Томасом были записаны такие ограничения для производных функций, терпящих разрыв. Позднее Г.И. Быковцевым и его учениками была развита теория рекуррентных соотношений на разрывы производных любого порядка по времени и пространственной координате, что и позволило предложить им лучевой метод построения приближенных решений, который развивается в настоящей работе. Таким образом, *целью* настоящей диссертации является развитие лучевого метода решения существенно нестационарных задач нелинейной динамики деформирования на основе обобщения теории условий совместности разрывов на движущихся поверхностях в нелинейно-упругих средах.

Вытекающие из заданной цели задачи, таким образом, связаны с построением замкнутой теории условий совместности разрывов при задании движения деформируемой среды в произвольной криволинейной системе координат (обобщением теории Г.И. Быковцева и его учеников) и на такой основе с развитием лучевого метода. К задачам настоящей диссертации отнесем и иллюстрацию предлагаемого приближенного метода на примерах решения новых краевых задач нелинейной динамической теории упругости.

К основным результатам диссертации относятся:

- завершенная теория рекуррентных условий совместности разрывов функций и их производных при задании движения деформируемой среды в произвольной криволинейной системе координат;
- развитие на такой основе приближенного метода построения лучевых разложений за поверхностями разрывов деформаций;
- решение ряда конкретных краевых задач динамики деформирования нелинейно-упругой среды.

Научная новизна результатов диссертационной работы связана с

- завершением теории рекуррентных условий совместности разрывов функций и их производных до любого порядка на движущихся поверхностях, потребовавшей новых корректных определений понятий дельта-дифференцирования по времени;
- обобщением методики построения лучевых разложений на случай криволинейных и расходящихся лучей;
- предложением использовать в разложениях интенсивностей разрывов сведений об их зависимости от кривизны фронта;
- решением новых краевых задач нелинейной динамической теории упругости.

Достоверность полученных результатов обоснована использованием классических подходов механики деформируемого твердого тела, методов математической физики и современной геометрии.

Практическая значимость результатов диссертационной работы обусловлена насущной необходимостью технологической практики в математическом аппарате, который послужил бы надежной алгоритмической основой для расчетов процессов интенсивного и импульсного или ударного деформирования в технологиях изготовления и упрочнения изделий и элементов конструкций.

Апробация результатов диссертации. Отдельные результаты работы докладывались и обсуждались на Всероссийской математической школе-семинаре имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2003, 2004; Хабаровск, 2005), Научно-технической конференции «Вологдинские чтения» (Владивосток, 2003), Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики», посвященной 70-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова (Владивосток, 2006), Fifth, Sixth International Young Scholars' Forum of the Asia – Pacific Region Countries (Vladivostok, 2003, 2005), Всероссийской конференции «Аналитические методы в газовой динамике» САМГАД – 2006 (Санкт-Петербург, 2006). Диссертация в целом докладывалась на семинаре лаборатории механики деформируемого твердого тела ИАПУ ДВО РАН под руководством д.ф.-м.н., профессора А.А. Буренина.

Публикации по работе. По теме диссертации опубликовано 14 работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из наименований. Общий объем работы страниц, в том числе рисунка, включенных в текст.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение к работе содержит краткий обзор литературы, посвященной проблемам моделирования волновых процессов в нелинейно-упругих средах при импульсных и ударных воздействиях. Большое внимание уделено развитию лучевого метода, одному из наиболее эффективных в исследовании сингулярных поверхностей, являющихся необходимым элементом в постановке таких задач. Отмечается вклад в развитие метода Алексеева А.С., Ахенбаха Дж., Бабича В.М., Бестужевой Н.П., Булдырева В.С., Буренина А.А., Быковцева Г.И., Вервейко А.Д., Власовой И.А., Дуровой В.Н., Зиновьева П.В., Кукуджанова В.Н., Молоткова И.А., Подильчука Ю.Н., Россихина Ю.А., Рубцова Ю.К., Хилла Р., Шагалова А.Г., Шитиковой М.В., Reddy D., Sun C., Truesdell C. и др. Здесь же представлено содержание диссертации по главам.

В первой главе рассматривается модель нелинейно-упругой среды, приводятся некоторые необходимые сведения из тензорного анализа в евклидовом пространстве и соотношения на поверхностях сильных разрывов. Изложение материала проводится в криволинейной пространственной системе координат. Общая система уравнений, описывающая динамическое поведение нелинейно-упругой среды в переменных Эйлера, имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{v}^i = \dot{u}^i + u^i_{,j}\mathrm{v}^j, \quad \sigma^{ij}_{,j} = \rho\left(\dot{\mathrm{v}}^i + \mathrm{v}^i_{,j}\mathrm{v}^j\right), \\
2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u^k_{,j}, \quad \sigma^i_j = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha^j_k}\left(\delta^i_k - 2\alpha^i_k\right), \qquad (1) \\
\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_3\right)^{1/2}, \\
I_1 = \alpha^i_i, \quad I_2 = \alpha^i_j\alpha^j_i, \quad I_3 = \alpha^i_j\alpha^j_k\alpha^k_i,
\end{gathered}
$$

$$\dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} u^k, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} u_k,$$

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \xi I_2^2 + \eta I_1^2 I_2 + \kappa I_1 I_3 + \chi I_1^4 + \mathbf{L},$$

где u^i, v^i – компоненты векторов перемещений и скорости точек среды; α_{ij} и σ^{ij} – компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера-Коши; ρ и ρ_0 – плотность среды в текущем и свободном состоянии; $W(I_1, I_2, I_3)$ – упругий потенциал изотропной среды; λ, μ, l, m, n, ξ, η, κ, χ – упругие модули. Для несжимаемой среды ($\rho = \rho_0$) лишь два инварианта I_1, I_2 оказываются независимыми, а в формулу Мурнагана следует ввести неизвестную функцию добавочного гидростатического давления.

На ударных волнах должны выполняться динамические условия совместности, как следствия интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\left[\rho\left(\mathrm{v}^i \nu_i - G\right)\right] = 0, \quad \left[\sigma^{ij}\right]\nu_j = \rho^+\left(\mathrm{v}^{j+}\nu_j - G\right)[\mathrm{v}^i],$$
$$\sigma^{ij+}[\mathrm{v}_i]\nu_j = \rho^+\left(\mathrm{v}^{j+}\nu_j - G\right)\left(\frac{[\mathrm{v}_i][\mathrm{v}^i]}{2} - [e]\right) - \left[q^j\right]\nu_j, \tag{2}$$

где индекс "+" означает величину, вычисляемую непосредственно перед поверхностью разрыва $\Sigma(t)$, G – скорость $\Sigma(t)$ в направлении ее единичной нормали с компонентами ν^i, e – плотность внутренней энергии, q^j – компоненты вектора теплового потока. В дальнейшем рассмотрим движение поверхности $\Sigma(t)$, заданной уравнениями $x^i = x^i(y^1, y^2, t)$, каждая точка которой движется в направлении своей нормали с сохранением постоянных значений y^1, y^2, так что $\dot{x}^i(y^\gamma, t) = G\nu^i$. Здесь и в дальнейшем греческие индексы принимают значения 1,2. Кроме (2), разрывы функций и их производных на поверхностях разрыва связаны геометрическими и кинематическими условиями совместности. Однако существующая теория таких ограничений изложена в декартовой пространственной системе координат, в то время как многие задачи эффективнее решаются в пространственных криволинейных системах координат, выбор которых диктуется конкретными краевыми условиями. С целью получения аналогичных условий совместности для произвольной криволинейной системы координат потребовалось, прежде всего, обобщение операции δ-

дифференцирования тензорного поля, которая определяется по-разному в зависимости от типа тензорного поля (пространственный, поверхностный или смешанный). Но в каждом случае δ -производная должна определять тензорный объект, для предельного перехода от криволинейных координат к декартовым δ -производные не должны противоречить друг другу.

Приведем, к примеру, следующую операцию δ -дифференцирования для смешанного тензора $A^{i\alpha}_{j\beta}(y^{\gamma},t)$:

$$\frac{\delta A^{i\alpha}_{j\beta}}{\delta t}=\frac{\partial A^{i\alpha}_{j\beta}}{\partial t}+\left\{\Gamma^{i}_{lk}A^{l\alpha}_{j\beta}-\Gamma^{l}_{jk}A^{i\alpha}_{l\beta}\right\}G\nu^{k}. \tag{3}$$

На основании правил подобных (3) получены дифференциальные соотношения, отражающие динамику изменения геометрических характеристик поверхности: касательных векторов и вектора нормали, первой, второй и третьей квадратичных форм. Рассмотрены некоторые свойства δ -производных, такие как правило дифференцирования прямого произведения, перестановочность с операцией свертывания и т.д. Условия совместности разрывов первого порядка в криволинейной системе координат выражаются формулами

$$\left[f_{,i}\right]=\left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]\nu_i+a^{\alpha\beta}\left[f\right]_{,\beta}x^{\cdot}_{i,\alpha},\ \left[\dot{f}\right]=\frac{\delta\left[f\right]}{\delta t}-\left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]G,\ \left[f\right]=f^{+}-f^{-}, \tag{4}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]=\left[f_{,i}\nu^{i}\right],\ g_{ij}x^{j}_{\alpha}=x^{\cdot}_{i,\alpha},\ a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma},\ a_{\beta\gamma}=x^{i}_{\beta}x^{\cdot}_{i,\gamma},$$

где f – компоненты некоторого тензорного поля, определенного в рассматриваемой области и, в частности, на $\Sigma(t)$. Также в первой главе получены рекуррентные формулы для разрывов производных k -го порядка, которые здесь не приводим только в силу их громоздкости. Отметим, что область применения полученных формул не ограничивается тематикой настоящей работы. Они имеют универсальный характер в евклидовом пространстве и могут применяться при решении динамических задач со слабыми волнами или же для задач, включающих стационарные поверхности разрывов и т.д.

Вторая глава посвящена изучению закономерностей распространения одномерных цилиндрических ударных волн в нелинейно-упругих средах. Из литературы хорошо известны описания таких процессов для плоских волн. Важным результатом здесь явилось разделение фронта деформаций изменения формы на квазипоперечную ударную волну и нейтральную ударную волну (волну круговой поляризации). Оказывается, что это справедливо только для данного идеального случая, наличие кривизны волнового фронта не допускает такого эффекта. Опираясь на результаты, полученные в первой главе, проведем изучение цилиндрических волн в наиболее удобной здесь системе координат $x^1 = r$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$. В рассматриваемом случае $u_r = u_r(r,t)$, $u_\phi = u_\phi(r,t)$, $u_z = u_z(r,t)$. Основной характеристикой разрыва считаем волновой вектор с компонентами $\tau^i = \left[u^i_{,j}\right]\nu^j$, которые для нашей задачи в физических координатах принимают вид:

$$\tau_r = [u_{r,r}],\ \ \tau_\phi = [u_{\phi,r}],\ \ \tau_z = [u_{z,r}],\ \ u_{r,r} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \ u_{\phi,r} = \frac{\partial u_\phi}{\partial r},\ \ u_{z,r} = \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (5)$$

Проецируя второе из уравнений (2), являющееся следствием закона сохранения импульса, на нормаль и касательные направления к $\Sigma(t)$ и предполагая нелинейные эффекты слабыми, можно представить искомые скорости в виде рядов, зависящих от предварительных деформаций и компонент волнового вектора. На основании (2) оказываются возможными три типа ударных волн. Первая из них будет квазипродольной: при наличии в среде предварительных деформаций она имеет как продольную, так и поперечную составляющую волнового вектора, но последняя оказывается величиной второго порядка малости относительно продольной. Скорости такой волны в линейном приближении соответствует $C_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)\rho_0^{-1}}$. Остальные две волны квазипоперечные: на них изменяются главным образом сдвиговые деформации и уже затем объемные. На одной из поперечных волн основная составляющая вектора разрывов соответствует антиплоскому деформированию, на другой изменяются прежде всего скручивающие деформации. Ответить на вопрос о том, какая из поперечных волн движется быстрее, в общем случае оказывается невозможным. Такой сравнительный анализ был проведен для двух часто встречающихся случаев предварительных деформаций в среде: 1) $u_r^+ \neq 0,\ u_z^+ \neq 0,\ u_\phi^+ = 0$, 2) $u_r^+ \neq 0,\ u_\phi^+ \neq 0,\ u_z^+ = 0$. Оказалось, что квазипоперечная волна, на которой в основном меняется τ_z, движется быстрее, чем волна, на которой преобладает τ_ϕ. Ни одна из сдвиговых волн не воспроизводит эффекта нейтральности, наблюдаемого в случае плоских ударных волн, т.е. в представленной здесь задаче на каждой поперечной волне меняется не только интенсивность, но и направляющие предварительных сдвиговых деформаций.

В третьей главе рассматриваются одномерные задачи о нормальном ударе по внутренней поверхности цилиндрического или сферического отверстий в недеформированном нелинейно-упругом пространстве. Приближенные решения этих и последующих задач строятся с помощью лучевого метода. Точное решение для поля перемещений заменяется в окрестности $\Sigma(t)$ рядом вида

$$u^{II}(r,t) = u^{I}(r,t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \omega_n(t_\Sigma)\left(t - t_\Sigma\right)^n, \quad t \geq t_\Sigma, \tag{6}$$

$$t_\Sigma(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{d\xi}{G(\xi)}, \quad \omega_n(t) = \left[\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right]\Bigg|_{\Sigma(t)}.$$

В (6) под $u(r,t)$ подразумевается любая из компонент u_r, u_ϕ, u_z. Индексом “I” обозначена область перед фронтом волны, а индексом “II” – область за ударной волной. Для коэффициентов этого ряда $\omega_n(t)$ может быть получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений затухания) на основании рекуррентных условий совместности из главы 1. Однако непосредственное интегрирование здесь невозможно, т.к. каждое k-е уравнение содержит неизвестный разрыв $\omega_{k+1}(t)$ следующего шага. Преодоление этой трудности возможно при повторном разложении скачков искомых функций в ряды по δ-производным в окрестности начального момента времени

$$\omega_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\delta^k \omega_{n0}}{\delta t^k} t^k, \quad \frac{\delta^k \omega_{n0}}{\delta t^k} = \frac{\delta^k \omega_n}{\delta t^k}\Bigg|_{t=0}, \quad \omega_{n0} = \omega_n(0), \tag{7}$$

коэффициенты которых – неизвестные константы ω_{n0} – впоследствии определяются по граничным условиям, в чем состояло предложение А.А. Буренина и Ю.А. Россихина. Такой выбор момента времени предполагает, что решение строится для малых послеударных времен. В пределах квадратичного по времени анализа в (7) можно ограничиться представлением

$$\omega_1(t) \approx \omega_{10} + \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} t, \quad \omega_2(t) \approx \omega_{20}. \tag{8}$$

Так в задаче о расходящейся продольной цилиндрической ударной волне с граничными условиями

$$u_r\big|_{L(t)} = g(t), \quad t \geq 0, \quad g(t) = \mathrm{v}_0 t + \frac{a t^2}{2} + \mathbf{L}, \quad \mathrm{v}_0 > 0, \quad L(t) = r_0 + g(t), \tag{9}$$

записывая уравнение движения в разрывах, на первом шаге метода получим

$$\frac{\delta \omega_1}{\delta t} = \frac{A \omega_1 \omega_2}{C_1} + \frac{D \omega_1 C_1}{r_\Sigma} + \frac{B \omega_1^2}{r_\Sigma}, \quad r_\Sigma = r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi, \tag{10}$$

где A, B, D – безразмерные коэффициенты, зависящие от упругих модулей среды и от искомой функции $\omega_1(t)$. В (10) входит величина r_Σ^{-1}, определяющая кривизну волнового фронта, что отличает задачу от случая плоской волны. Если в (10) положить $t = 0$, можно выразить одну из неизвестных величин через остальные, например $\delta\omega_{10} / \delta t$ через ω_{10} и ω_{20}. Тогда, подставляя в краевое условие (9) ряд (6), в котором скачки производных представлены с помощью (8), определим ω_{10} и ω_{20}, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t. Совместно с полем перемещений определяется функциональная зависимость вида $r_\Sigma = r_\Sigma(t)$ или $t_\Sigma = t_\Sigma(r)$, связывающая r и t на переднем фронте волны:

$$
\begin{aligned}
u_r &= -\left\{\omega_{10} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} t_\Sigma + \mathbf{L}\right\}(t - t_\Sigma) - \frac{1}{2}(\omega_{20} + \mathbf{L})(t - t_\Sigma)^2 + \mathbf{L}, \\
t_\Sigma &= C_1^{-1}\left(1 + \beta_1 C_1^{-1}\omega_{10} + \beta_2 C_1^{-2}\omega_{10}^2 + \mathbf{L}\right)^{-1}(r - r_0) - \\
&- \frac{1}{2}\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} C_1^{-3}\left(\beta_1 + 2\beta_2 C_1^{-1}\omega_{10} + \mathbf{L}\right) \times \\
&\times \left(1 + \beta_1 C_1^{-1}\omega_{10} + \beta_2 C_1^{-2}\omega_{10}^2 + \mathbf{L}\right)^{-3}(r - r_0)^2 + \mathbf{L},
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

где β_1 и β_2 являются функциями упругих модулей. Для сферических продольных волн в (10) будет входить средняя кривизна поверхности, что приведет к более быстрому затуханию интенсивности, чем для цилиндрических волн.

В четвертой главе строятся решения одномерных задач о поперечных цилиндрических ударных волнах, создаваемых антиплоским или скручивающим деформированием цилиндрической полости в нелинейно-упругой несжимаемой среде. Условие несжимаемости принято с целью выделения сдвиговых деформационных процессов без влияния на них предварительного объемного деформирования. Ударное воздействие по r_0 приводит к появлению поперечной ударной волны с момента времени $t = 0$. Следствием дифференциальных законов сохранения будет система двух уравнений, например, в случае антиплоского деформирования ($u_r = u_\phi = 0$, $u_z = u_z(r,t)$) получим

$$
\begin{aligned}
&u_{z,rr}\left(1+3\beta u_{z,r}^2\right)+\frac{u_{z,r}}{r}+\beta\frac{u_{z,r}^3}{r}=\frac{\ddot{u}_z}{C_2^2},\\
&p_{,r}+\alpha u_{z,r}u_{z,rr}+\left(1+\gamma\right)\frac{u_{z,r}^2}{r}=0,\quad C_2=\left(\mu\rho_0^{-1}\right)^{1/2},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где α, β, γ - функции упругих модулей. В системе (12) основным является первое уравнение, решение которого может быть найдено независимо от второго. Затем по известному полю перемещений из второго уравнения определяется добавочное гидростатическое давление $p(r,t)$, для которого из динамических условий совместности следует граничное условие $\left[\sigma_{rr}\right]\big|_{r_\Sigma}=0$. При скручивающем деформировании получаем аналогичную систему уравнений относительно $p(r,t)$ и функции угла поворота $\psi(r,t)$. Применение лучевого метода в этих задачах имело такие же характерные этапы и особенности, как и в третьей главе. На примере задачи о скрутке исследованы особенности применения лучевого метода в автомодельных задачах. В этом случае определение коэффициентов лучевого ряда сводится на каждом шаге к решению алгебраических уравнений, а ряд по лучевым координатам – к ряду по автомодельной переменной в окрестности ее фронтового значения.

В пятой главе рассмотрена двумерная задача об антиплоском деформировании полуограниченного несжимаемого пространства, границей которого служит правая ветвь гиперболы L_0: $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{x_2^2}{b^2}=1,\ x_1\ge a.$ Результатом ударного воздействия на L_0 будут граничные перемещения

$$
u_z\big|_{L_0}=\mathrm{v}_0(y)t+\frac{a(y)t^2}{2}+\mathbf{L}
\tag{13}
$$

где $y=x_1$ – параметр вдоль L_0. С целью упрощения дальнейших выкладок положим здесь $\mathrm{v}_0=const$, $a=0$. Поле перемещений в окрестности $\Sigma(t)$ будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
&u_z^{II}(s,y,t)\approx u_z^{I}(s,y,t)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\omega_n(y,t)\big|_{t=t_\Sigma}\left(t-t_\Sigma\right)^n,\\
&t_\Sigma(s,y)=\int_0^s\frac{d\xi}{G(\xi)},\quad \omega_n(y,t)=\left[\frac{\partial^n u_z}{\partial t^n}\right]\Bigg|_{\Sigma(t)}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где s – расстояние вдоль луча, y – координата эйконала. Обычная схема лучевого метода приводит на первом шаге к уравнению

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta t} = \frac{2\alpha C_2^{-2}\omega_1^2\omega_2 + 2C_2 H(t)\omega_1\left(1+0.5\alpha\omega_1^2 C_2^{-2}\right)}{2+3\alpha\omega_1^2 C_2^{-2} - 1.5\alpha^2\omega_1^4 C_2^{-4} + \mathbf{L}} + \mathbf{L}\,, \tag{15}$$

которое в данном случае еще необходимо дополнить уравнениями для δ-производных кривизны волнового фронта $H(y,t)$ и компоненты поверхностного метрического тензора $a^{11}(y,t)$. Тогда получим систему трех дифференциальных уравнений относительно четырех неизвестных: ω_1, ω_2, H, a^{11}. Предположим, что в силу малой нелинейности задачи ее решение незначительно отличается от решения сходной линеаризованной задачи. Тогда, заменяя величину ω_2 на ее линейное приближение, получим замкнутую систему уравнений, которую можно решить приближенно с помощью метода разложения по малому параметру. Такой алгоритм хотя и заставляет поступиться более простыми алгебраическими соотношениями на искомые функции при $t=0$, но точнее отражает характер процесса, когда кривизна волнового фронта быстро изменяется со временем. Декартовы координаты поверхности $\Sigma(t)$ в зависимости от времени задаются соотношениями

$$x_i(y,t) = x_{i0}(y) + \int_0^t G(y,\xi)\nu_i(y,\xi)d\xi\,,\;\; x_{10}(y) = y\,,\;\; x_{20}(y) = \frac{b}{a}\sqrt{y^2-a^2}\,, \tag{16}$$

причем компоненты вектора нормали ν_i сами зависят от текущего положения волнового фронта. Однако результаты предыдущих вычислений позволяют получить замкнутую систему уравнений относительно ν_i и касательных векторов к $\Sigma(t)$. Время, за которое по фиксированному лучу будет пройдено расстояние s, вычисляется по формуле

$$t_\Sigma = \frac{s}{C_2} + \frac{\alpha\omega_{10}^2}{4H(0)C_2^3}\ln\left(1-2H(0)s\right). \tag{17}$$

Подстановка найденных величин ω_1 и ω_2 в (14), с учетом (17) позволяет выписать приближенное лучевое разложение поля перемещений за ударной волной.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. С целью описания волн произвольной геометрии проведено уточнение понятия операции дельта-дифференцирования тензорных полей для пространственной криволинейной системы координат. Получены соотношения для дельта-производных основных геометрических характеристик поверхности.

2. Получены рекуррентные условия совместности разрывов производных произвольного порядка.
3. Установлены закономерности распространения одномерных цилиндрических ударных волн малой интенсивности в упругих средах. Вычислены скорости возможных ударных волн в зависимости от их интенсивности и предварительных деформаций. Показано, что в отличие от плоских одномерных волн цилиндрические поверхности разрывов круговой поляризации невозможны.
4. Рекуррентные условия совместности разрывов позволили обобщить методику построения лучевых разложений решения краевых задач, поставленных изначально в криволинейных системах координат. Таким способом получены приближенные решения задач о нормальном ударе по цилиндрической или сферической полости в нелинейно-упругой среде. Отмечены особенности получаемых решений, связанные с изменением кривизны волнового фронта.
5. Получены лучевые разложения решений задач с поперечными ударными волнами: цилиндрической задачи антиплоского деформирования в нелинейно-упругой несжимаемой среде, задачи о скручивающем воздействии на границе цилиндрической полости. На примере задачи о скрутке исследованы особенности применения лучевого метода в автомодельных задачах.
6. Получено приближенное решение двумерной задачи об антиплоском деформировании полуограниченного несжимаемого пространства, границей которого служит правая ветвь гиперболы. На данном примере указаны особенности обобщения метода лучевых разложений на случай, когда лучи криволинейные и расходящиеся. Предлагается заменить на k-ом шаге построения лучевого разложения разрыв $k+1$-го порядка его линейным приближением (решением линеаризованной задачи). Таким способом совместно с полем перемещений определяется конструкция лучей и геометрия волнового фронта.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн // Вестник Самарского государственного университета – Естественнонаучная серия. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. № 6/1(46). С. 94-113.
2. Герасименко Е.А. Лучевой метод решения краевых задач ударного деформирования // Вестник ДВО РАН. Владивосток: «Дальнаука», 2006. №4. С. 112-117.

3. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневосточный математический журнал. Владивосток: «Дальнаука», 2004. Т. 5, № 1. С. 100-109.
4. Герасименко Е.А. Особенности одномерных осесимметричных задач ударного деформирования в нелинейно-упругих средах // XV Всероссийская конференция молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках»: тезисы докладов. Пермь, 4-7 октября 2006 г. Пермь: Изд-во Пермского государственного технического университета, 2006. С. 25.
5. Герасименко Е.А. О построении приближенных решений одномерных задач ударного деформирования с неплоскими поверхностями разрывов // Материалы Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики», посвященной 70-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова. Владивосток, 25-30 сентября 2006 г. Владивосток: Изд-во ИАПУ ДВО РАН, 2006. С. 35-36.
6. Герасименко Е.А. Лучевой метод решения одномерных задач ударного деформирования в нелинейно-упругих средах // XXI Всероссийская конференция «Аналитические методы в газовой динамике» (САМГАД – 2006): тезисы докладов. Санкт-Петербург, 5 – 10 июля 2006 г. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2006. С.25-26.
7. Gerasimenko E.A. Approximate solutions of boundary problems including shock waves in nonlinear-elastic mediums // XXXIV Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics” (APM 2006): book of abstracts. June 25 – July 1, 2006, St.Petersburg (Repino), Russia. Saint- Petersburg: Institute of Problems of Mechanical Engineering, 2006. P. 36.
8. Gerasimenko E.A. Motion regularities of cylindrical one-dimensional shock waves in compressible elastic medium // Materials of Sixth International Young Scholars’ Forum of the Asia – Pacific Region Countries. Vladivostok, Russia, 27 – 30 September, 2005. Vladivostok: FESTU, 2005. Part 1. P. 158-159.
9. Герасименко Е.А. Об особенностях распространения одномерных цилиндрических ударных волн // Дальневосточная математическая школа-семинар им. академика Е.В. Золотова: тезисы докладов. Хабаровск, 21-27 августа, 2005 г. Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2005. С. 153-154.
10. Буренин А.А., Рагозина В.Е., Герасименко Е.А. Приближенные методы в нелинейной механике ударного деформирования // Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике»: тезисы докладов. Новосибирск, 27-31 мая, 2005 г. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2005. С. 113.

11. Герасименко Е.А. Применение лучевого метода для решения задач о продольной цилиндрической и сферической ударных волнах // Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова: тезисов докладов. Владивосток, 6-11 сентября, 2004 г. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 2004. С. 97-98.
11. Gerasimenko E.A. Geometrical and kinematics compatibility conditions in a curvilinear coordinate system // Materials of Fifth International Young Scholars' Forum of the Asia – Pacific Region Countries. Vladivostok, Russia, 23-26 September, 2003. Vladivostok: FESTU, 2003. Part 1. P. 205-207.
12. Герасименко Е.А. Соотношение совместности для разрывов производных в криволинейных системах координат // Материалы научной конференции «Вологдинские чтения». Естественные науки. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2003. С. 19-21.
13. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Геометрические и кинематические условия совместности в криволинейных системах координат // Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова: тезисы докладов. Владивосток, 31 августа – 6 сентября 2003 г. Владивосток: «Дальнаука», 2003. С. 108-110.

Личный вклад автора. Работы [2,4-9,11-13] выполнены автором лично. В работах [1,3,10,14] автор участвовала в постановке задач, разработке алгоритмов решения и выполняла все необходимые вычисления.

Герасименко Екатерина Андреевна

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЛУЧЕВЫХ
РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Автореферат

Подписано к печати 12.04.2007 г. Усл.п.л. 0.8. Уч.-изд.л. 0.7.
Формат 60x84/16. Тираж 100. Заказ .

Издано ИАПУ ДВО РАН. Владивосток, Радио, 5.
Отпечатано участком оперативной печати ИАПУ ДВО РАН.
690041, Владивосток, Радио, 5.