

На правах рукописи

ЛОШМАНОВ Антон Юрьевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ТЕНЗОРОВ  
ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ С РАЗРЫВНЫМ  
ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук



Владивосток - 2006

Работа выполнена в Институте машиноведения и металлургии ДВО РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор, заслуженный деятель науки РФ  
Хромов Александр Игоревич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Астафьев Владимир Иванович;

кандидат физико-математических наук  
Зиновьев Павел Владимирович.

Ведущая организация: Самарский государственный технический  
университет.

Защита состоится «23» ноября 2006 года в 14 часов на заседании  
диссертационного совета ДМ 005.007.02 в Институте автоматизации и процессов  
управления ДВО РАН по адресу: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5,  
аудитория 510.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института автоматизации и  
процессов управления ДВО РАН.

Автореферат разослан «19» октября 2006 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
к.ф.-м.н.

 — Дудко О.В.

### ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из основных задач механики твердого тела является оценка прочности элементов, работающих в реальных условиях эксплуатации. Одним из параметров, существенно влияющим на запас прочности элементов конструкций, является степень деформируемости материала. Степень деформируемости материала оценивается различными параметрами, которые не всегда являются инвариантными. В данной работе деформируемость материала оценивается тензорами конечных деформаций и их инвариантами, что позволяет корректно оценить деформации частиц материала, включая окрестности зон локализации пластических деформаций.

Развитие фундаментальных соотношений теории идеальной пластичности связано с именами Л. Прандтля, Г. Гейрингер, Р. Хилла, В. Прагера, В. Койтера, Е. Ли, А. Надаи, Г. Генки, Е. Оната и др. Вопросам и задачам теории идеальной пластичности посвящены многочисленные работы отечественных авторов: Б.Д. Аннина, Г.И. Быковцева, Б.А. Друянова, Л.М. Качанова, Р.И. Непершина, А.Ю. Ишлинского, С.А. Христиановича, В.В. Соколовского, Д.Д. Ивлева и др.

Реальные материалы обладают сложным комплексом свойств. Попытка учесть их все сразу чрезвычайно усложняет анализ. Однако зачастую необходимая информация может быть получена при помощи базовых моделей, к которым относится модель идеального жесткопластического тела.

Одной из основных проблем этого направления является то, что деформации в пластической области распределяются крайне неравномерно. Эксперименты показывают существование тонких слоев локализации деформаций (порядка 20-50 мкм), примыкающих к жесткопластическим границам с большим градиентом перемещений, что в теории жесткопластических тел соответствует особенностям поля скоростей перемещений (точки, линии и поверхности разрывов различного порядка). Подобный эффект наблюдается также в окрестности точек резкого изменения формы тела (например, угловых точек). Деформации в окрестности таких особенностей значительно превышают деформации в непрерывном поле скоростей перемещений и могут определять процессы разрушения тел.

Реальная прочность материала в составе конструкций на несколько порядков отличается от теоретически достижимой прочности, определяемой межатомными (межмолекулярными) связями. Снижение прочности объясняется наличием дефектов, приводящих к пластическому течению даже при относительно малых напряжениях, и трещин, в результате развития которых может наступить разрушение. В общем случае под разрушением подразумевается не только необратимый распад материалов на две или больше частей. В понятие разрушения входит также необратимое пластическое течение, которое характеризуется остаточной деформацией и приводящее к исчерпанию несущей способности. Поэтому описание процесса накопления деформаций представляет отдельную актуальную задачу.

Целью работы является жесткопластический анализ процесса накопления пластических деформаций и их локализация при плоских пластических течениях с угловыми точками, содержащими при расчете полей напряжений и скоростей перемещений особенности типа поверхности разрыва скоростей и центра веера линий скольжения; определение зон возможного разрушения материала; описание процесса разрушения для задачи о растяжении полосы с вырезами в рамках плоской деформации.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- исследованы поля тензоров деформаций в задачах обработки материалов давлением (прямое прессование, обратное прессование, прошивка полосы, течение жесткопластического материала по каналу с угловым изгибом, выглаживание поверхности угловым штампом); в рассматриваемых задачах получены поля деформаций с учетом их накопления;

- исследованы процессы деформирования и разрушения полосы с V-образными вырезами при растяжении; рассмотрены возможные случаи образования трещин в полосе при растяжении на основе анализа полей деформаций в пластической области.

Достоверность полученных результатов основана на классических подходах механики сплошных сред и строгих математических выкладках.

Практическая значимость работы. Решение рассматриваемых задач актуально при разработке математических моделей поведения реальных элементов конструкций, оценки их надежности, разрушения при длительной эксплуатации с большим накоплением остаточных деформаций и в экстремальных условиях. Возможно применение данного подхода при разработке методов расчета технологических процессов обработки материалов давлением (прессование, волочение, прокатка), резанием; для проектирования оборудования, используемого при этих процессах.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на:

- XXIX Дальневосточной школе-семинаре им. академика Е.В. Золотова, Владивосток, 2004;

- XXX Дальневосточной школе-семинаре им. академика Е.В. Золотова, Хабаровск, 2005;

- Научной конференции молодых учёных по механике сплошных сред, посвященной 80-летию со дня рождения чл.-корр. АН СССР А.А. Поздеева, Пермь, 2006;

- VIII Краевом конкурсе-конференции молодых ученых, Хабаровск, 2006;

- XXXIV Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics", St. Petersburg (Repino), Russia, 2006;

- III Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, 2006;

- Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики», посвященной 70-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова, Владивосток, 2006;

- VII Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (весенняя сессия), Кисловодск, 2006.

Публикации по работе. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ и получено одно свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (92 наименования). Объем работы - 106 страниц, в том числе 35 рисунков.

### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении показана актуальность поставленной проблемы, проанализированы вопросы исследования плоского деформированного состояния и разрушения идеального жесткопластического тела, описано содержание диссертации по главам.

В первой главе представлены соотношения теории плоской деформации идеального жесткопластического тела.

В первых двух параграфах приводятся основные положения теории: полная система уравнений теории плоской деформации идеального жесткопластического тела, общие соотношения вдоль линий скольжения. В третьем параграфе приведены условия построения полного решения задач теории пластичности.

В четвертом параграфе описан метод исследования деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения (линии разрыва поля скоростей перемещений и центра веера линий скольжения). В качестве меры деформаций используется тензор конечных деформаций Альманси  $E_{ij}$ , связанный с дисторсией  $A = [a_{ij}] = [x_{j,i}^0]$ , соотношениями:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (d_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0) \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{2} (I - AA^*), \quad (1)$$

где  $x_{i,j}^0 = \partial x_i^0 / \partial x_j$ ;  $x_i^0$ ,  $x_j$  - соответственно лагранжевы и эйлеровы координаты частицы.

В пятом параграфе рассмотрена проблема неединственности пластического течения в задачах теории плоской деформации идеального жесткопластического тела. Для выбора предпочтительного решения используется критерий: *предпочтительным является решение, для которого наибольшее значение первого главного значения тензора Альманси  $E_1$  в пластической области минимально:*

$$\inf_y \sup_j E_1(j, y). \quad (2)$$

В шестом параграфе формулируются критерии разрушения и выбора направления развития трещины:

- *разрушение материала происходит, если деформации (алгебраически наибольшее главное значение тензора конечных деформаций Альманси  $E_1$ ) превышают критическое значение  $E_*$ :*

$$E_1 \geq E_* \quad \text{или} \quad \sup_j E_1(j, y) = E_*, \quad (3)$$

- *разрушение происходит в направлении, при котором приращение работы, необходимой для деформирования образца, максимально:*

$$dA(t) = \sup_y dA[y(t)], \quad (4)$$

или *направление разрушения ортогонально первому главному направлению.*

Во второй главе рассмотрены пластические течения в задачах обработки материалов давлением.

В первом параграфе исследовано поле деформаций в окрестности особенности поля скоростей деформаций (центре веера линий скольжения) в задаче о течении жесткопластического материала по каналу с угловым изгибом (рис. 1,а). Показано, что движение центра веера поля линий скольжения существенно влияет на распределение поля деформаций.

Предложенный подход позволяет исследовать деформации с учетом их накопления в листовых деталях при выглаживании угловым штампом, при изгибе листов, при некоторых видах листовой прокатки (рис. 1,б).

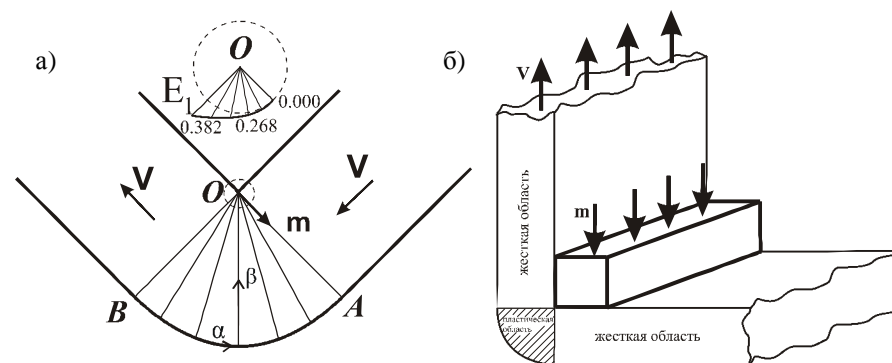


Рис. 1

Во втором параграфе рассмотрена задача о прессовании полосы через симметричную матрицу с углом  $g$  наклона боковых стенок (рис. 2,а). Зоны

пластической деформации заштрихованы. Получено распределение поля деформаций в полосе на выходе из матрицы с учетом их накопления (рис. 2,б, для случая  $g = 30^\circ$ ).

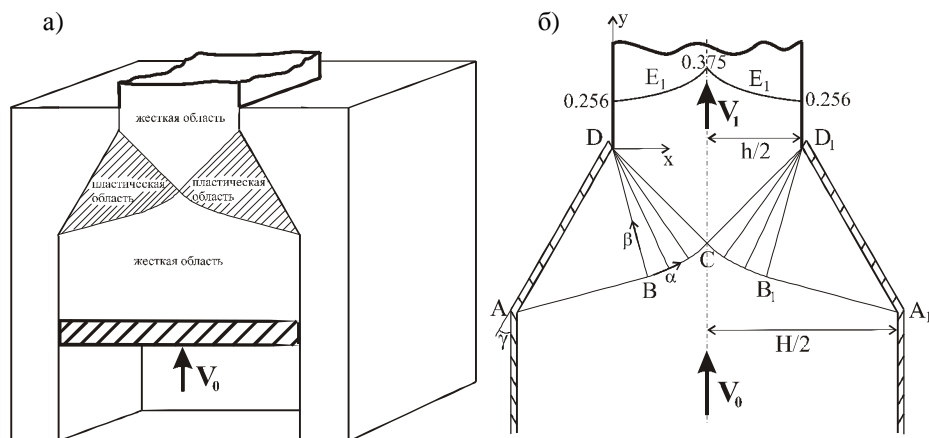


Рис. 2

Рассмотрен процесс прямого прессования (или выдавливания) листа из контейнера через матрицу с прямоугольными стенками и редуцированием в 50% (рис. 3,а). Распределение поля деформаций на выходе из матрицы представлено на рис. 3,б.

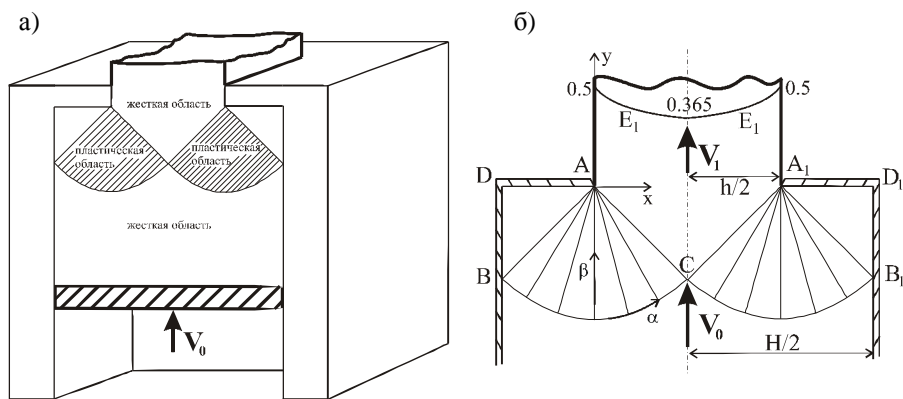


Рис. 3

Рассмотрены процессы обратного прессования (рис. 4,а) и прошивки (рис. 5,а) полосы с редуцированием в 50%, которые описываются тем же

полным решением, что и прямое прессование. Распределение полей деформаций с учетом их накопления представлены на рис. 4,б и рис. 5,б. Показано, что процессы обратного прессования и прошивки сводятся к процессу прямого прессования, при этом неоднородное пластическое течение и распределение деформаций в пластической области не меняются.

В третьем параграфе рассмотрена задача о выглаживании поверхности твердым (недеформируемым) угловым штампом с углом раствора  $2\theta$  (рис. 6,а). Рассматривается стационарное пластическое течение, т.е. поля скоростей и деформаций постоянны с течением времени. Поле линий скольжения и распределение поля тензора деформаций по высоте  $h$  представлены на рис. 6,б.

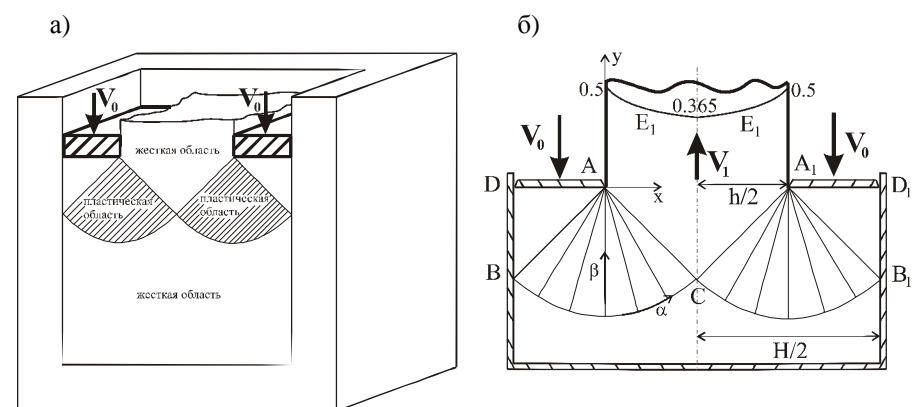


Рис. 4

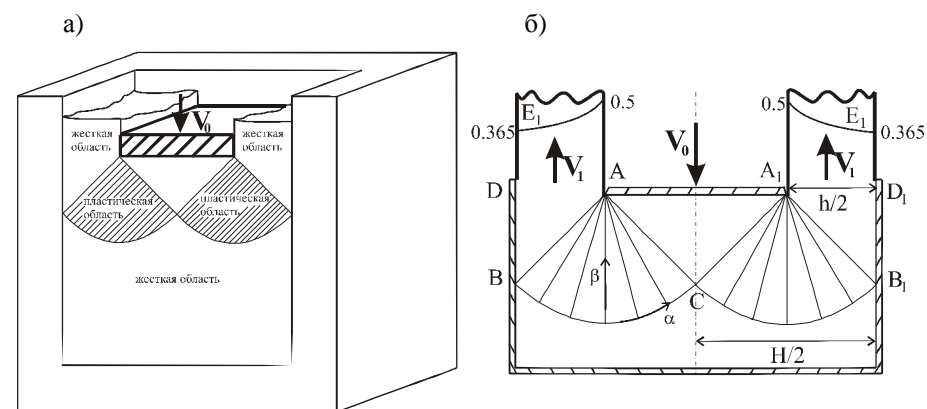


Рис. 5

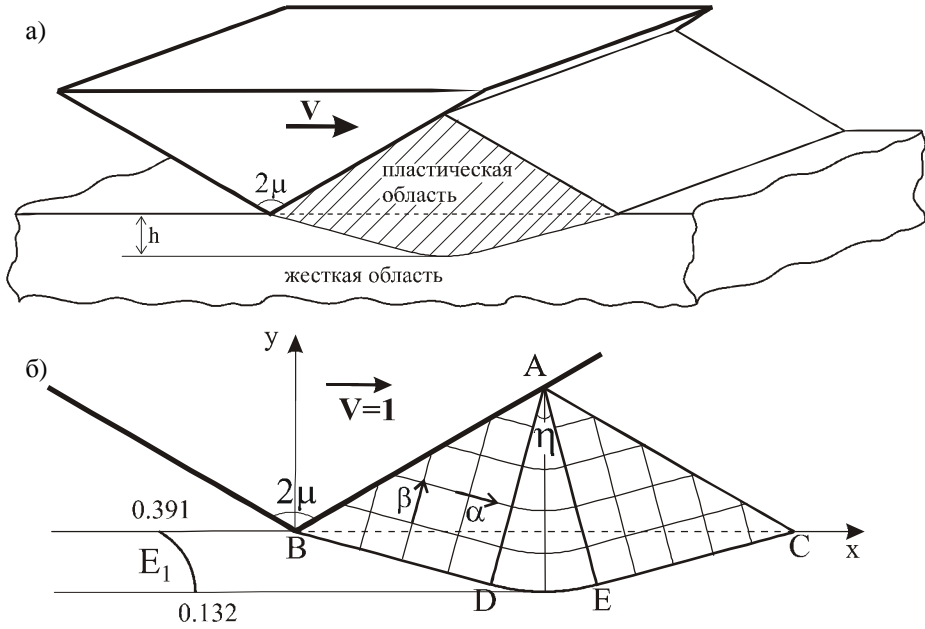


Рис. 6

В третьей главе рассмотрена задача о растяжении полосы с V-образными вырезами.

В первом параграфе рассмотрены известные решения этой задачи: решения Е. Ли (обобщения решений Хилла и Прандтля задачи о внедрении плоского штампа в жесткопластическое полупространство) и решение О. Ричмонда, содержащие ряд противоречий и не существующие как решения с развивающимися пластическими течениями.

Во втором параграфе рассмотрено известное решение с несимметричным пластическим течением (рис. 7,а) для углов вырезов  $d \in (52.4^\circ, 90^\circ]$ . Для углов  $d \leq 52.4^\circ$  деформации в пластической области достигают значения  $E_1 = 0.5$ , т.е. в этом случае возможно разрушение материала.

Согласно критерию выбора предпочтительного пластического течения (2) направление движения вершин вырезов выбирается таким, что свободная поверхность образуется под углом  $d_2 = d$  (рис. 7,а). При этом в процессе деформирования V-образные вырезы в полосе остаются симметричными относительно линии  $AA_1$ . Это приводит к неоднозначности пластического

течения, связанной с возможностью нахождения в пластическом состоянии как верхней, так и нижней частей полосы в различные промежутки времени.

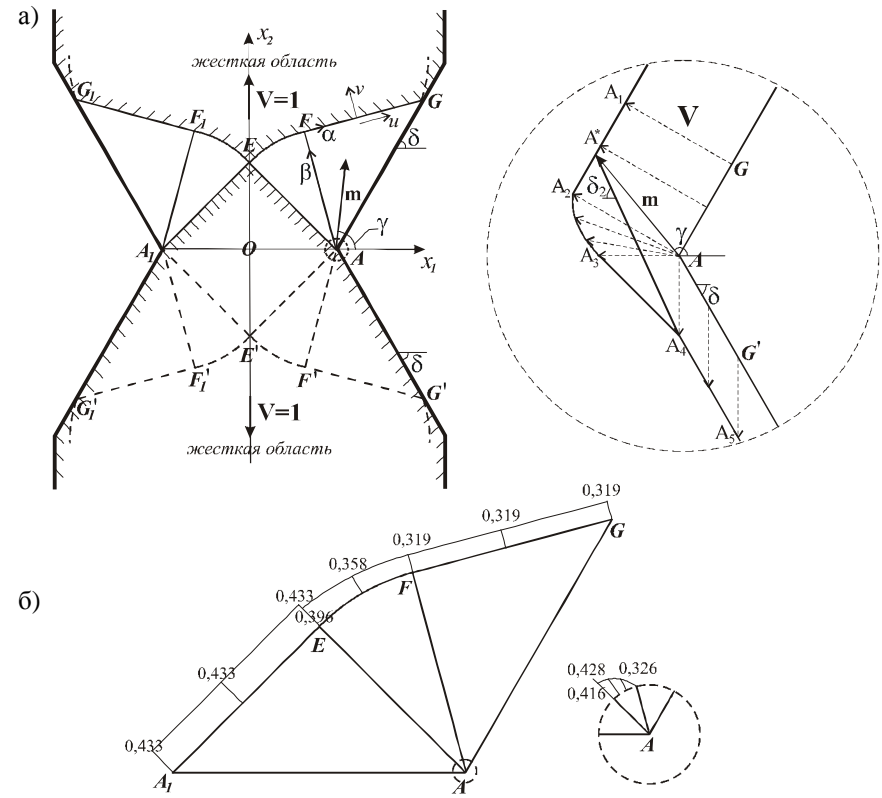


Рис. 7

На основе этого в третьем параграфе рассматривается решение (рис. 8,а), когда в пластическом состоянии попеременно находятся верхняя и нижняя части полосы. Рассматривается пластическое течение при равных промежутках времени ( $\Delta t_1 = \Delta t_2$ ), которое при стремлении  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$  к нулю приводит к симметричному пластическому течению. При этом вершина выреза движется по горизонтали.

На рис. 8,б представлено распределение деформаций в окрестности центра веера линий скольжения (точка A) и на линиях разрыва скоростей перемещений, наблюдаемое в области  $C_1A_1BAC$  в момент времени  $\Delta t_2$  для случая  $d = 60^\circ$ . В процессе деформирования полосы на каждом временном шаге значения деформаций, полученные на предыдущем шаге, являются

начальными значениями для данного шага, т.е. учитывается история процесса деформирования.

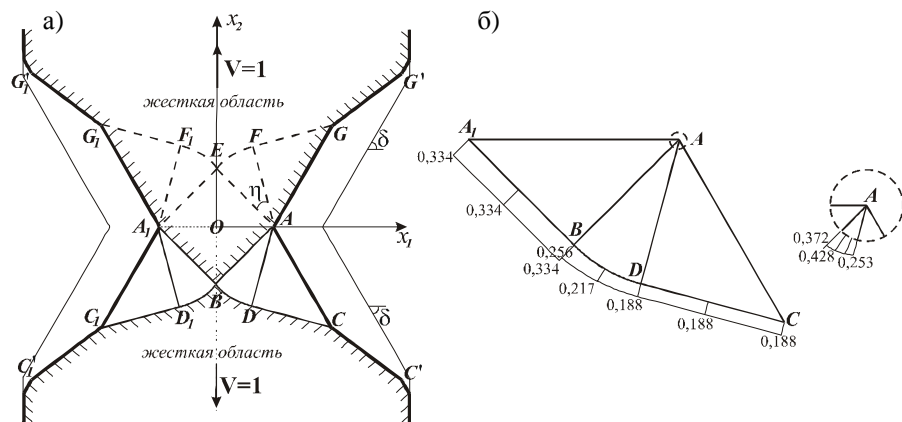


Рис. 8

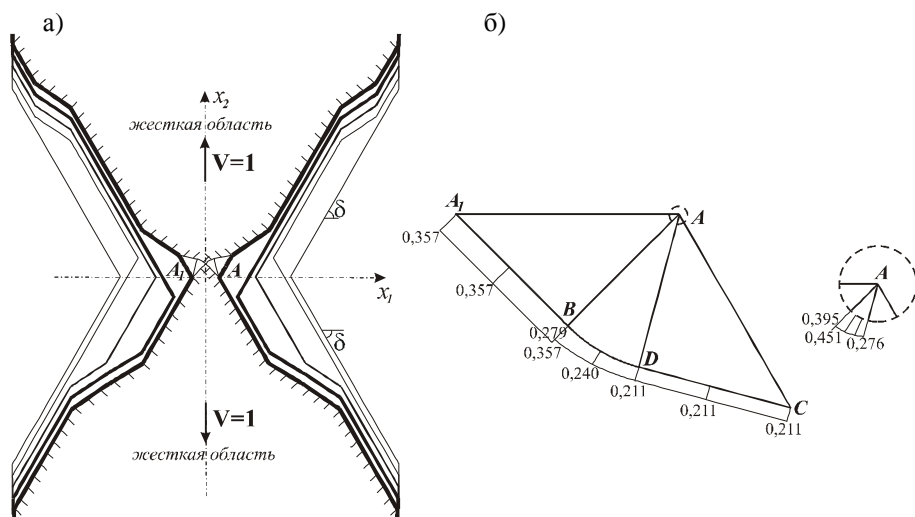


Рис. 9

Выбор предпочтительного направления движения вершины выреза (положения пластической области в верхней или нижней частях полосы) в текущий момент времени невозможен. Он определяется предыдущей историей деформирования, а также случайными факторами (наличием в

реальных материалах микродефектов, микрон неоднородностей, пористости и т.д.). На основании этого в четвертом параграфе предлагается новое решение задачи о растяжении полосы с вырезами без разрушения, когда положение пластической области (в верхней или нижней частях полосы) выбирается случайным образом (рис. 9,а).

На рис. 9,б представлено распределение деформаций в окрестности центра вена линий скольжения (точка  $A$ ) и на линиях разрыва скоростей деформаций, наблюдаемое в области  $C_1A_1BAC$  в процессе растяжения полосы для случая  $d = 60^\circ$ .

Сравнение рис. 7,б, 8,б и 9,б показывает, что наибольшие деформации получают частицы в окрестности центра вена поля линий скольжения и при симметричном пластическом течении они минимальны. Т.е. это решение является предпочтительным, согласно критерию выбора предпочтительного пластического течения (2), используемого в данной работе.

В четвертой главе предложены решения задачи о разрушении полосы с V-образными вырезами при растяжении.

В первом параграфе на основе решения задачи без разрушения предложено новое решение задачи о разрушении полосы в окрестности вырезов для углов  $d \leq 52.4^\circ$  ( $E_1 = 0.5$ ).

Вершинами трещин, распространяющихся со свободной поверхности, являются вершины V-образных вырезов. В различные промежутки времени в пластическом состоянии попеременно находятся верхняя и нижняя части полосы, при условии  $d_1 = d_2 = d$  в процессе растяжения, что объясняет экспериментально наблюдаемое зигзагообразное распространение трещины (рис. 10,  $d = 50^\circ$ ).

Предлагается решение задачи о разрушении полосы в окрестности вырезов для углов  $d \leq 52.4^\circ$ , когда выбор направления развития трещины в текущий момент времени определяется случайным образом (рис. 11,  $d = 50^\circ$ ).

Реальные конструкционные материалы могут не выдерживать значений деформаций  $E_1 = 0.5$  и начнут разрушаться при меньших значениях. В этом случае максимальные значения деформаций ограничиваются определенной величиной  $E_*$ , являющейся константой разрушения данного конструкционного материала, т.е. учитываются механические свойства материала. И тогда пластическое течение соответствует условию  $d_1 = d_2 < d$ .

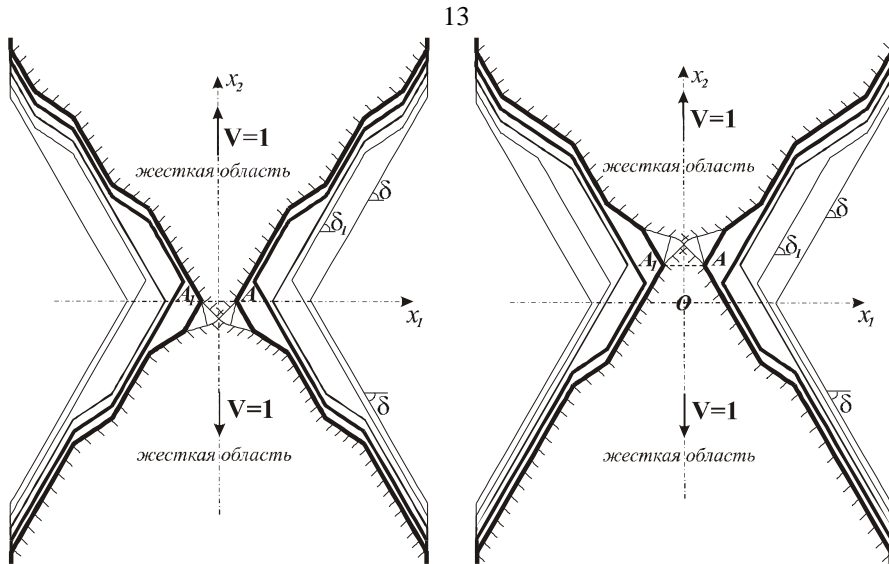


Рис. 10

Рис. 11

Во втором параграфе рассматривается пластическое течение, в котором деформации материала достигают своего критического значения  $E_*$  в пластической области в окрестности точки  $E$  (рис. 7). Рассматривается возможное образование трещины внутри материала (рис. 12).

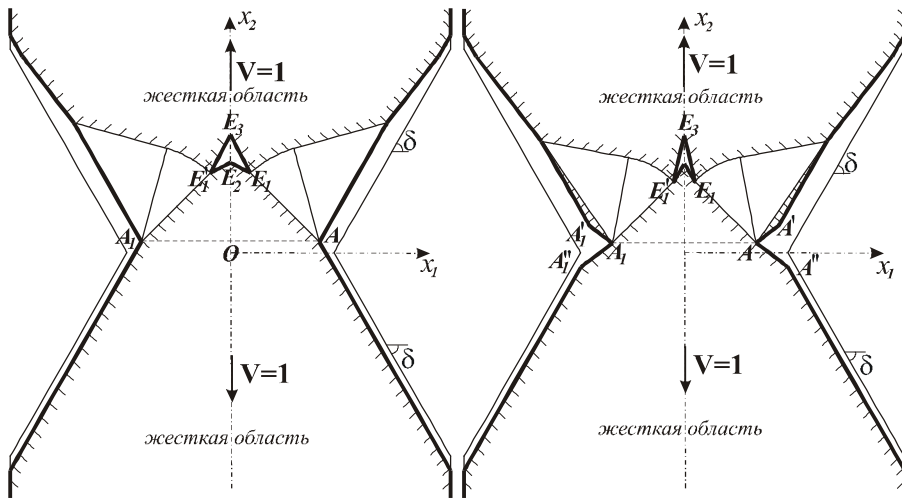


Рис. 12

Рис. 13

В третьем параграфе предполагается, что деформации достигают критических значений  $E_*$  как в окрестности угловых точек вырезов (точки  $A, A_1$ ), так и внутри пластической области (точка  $E$ ). В этом случае будет происходить образование внешних и внутренней трещин (рис. 13).

Разработаны алгоритмы построения свободных поверхностей в процессе разрушения. Изменение положения этих поверхностей описываются смещением точек поверхностей за выбранный интервал времени  $\Delta t$  согласно скоростям жестких областей, к которым они примыкают.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Разработан алгоритм и программа расчета полей тензоров деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений для решения плоских задач в рамках модели идеального жесткопластического тела.
2. Получены поля тензоров деформаций с учетом их накопления и локализации в задачах о течении жесткопластического материала по каналу с угловой точкой, прессовании полосы, выглаживании поверхности жестким угловым штампом.
3. Предложено новое решение задачи о растяжении полосы с V-образными вырезами без разрушения. На основе анализа поля тензора деформаций производится выбор предпочтительного пластического течения.
4. Рассмотрены возможные случаи образования трещин в полосе с V-образными вырезами при растяжении на основе анализа полей тензоров деформаций в пластической области с учетом механических свойств конструкционных материалов.

### ПУБЛИКАЦИИ ПО МАТЕРИАЛАМ ДИССЕРТАЦИИ

1. Лошманов А.Ю. Расчет полей деформаций в задачах обработки материалов давлением // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. С. 127-133.
2. Буханько А.А., Лошманов А.Ю., Хромов А.И. Расчет полей деформаций в задачах обработки материалов давлением при наличии особенностей поля скоростей перемещений // КШП. ОМД. 2006. №9. С. 22-27.
3. Лошманов А.Ю. Выглаживание поверхности угловым штампом // Обзорение прикладной и промышленной математики / Тезисы докладов. М.: ОПиПМ. Т. 13. Вып. 2. 2006. С. 333-334.
4. Bukhanko A.A., Loshmanov A.Yu. Problems of technological plasticity theory // Book of abstracts. XXXIV Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics", June 25 – July 1, 2006, St. Petersburg (Repino), Russia. P. 23.
5. Буханько А.А., Лошманов А.Ю. Математическое моделирование полей деформаций в пластических течениях с разрывным полем скоростей

перемещений // Фундаментальные и прикладные вопросы механики: Материалы Всероссийской конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова (Владивосток, 25-30 сентября 2006 г.). Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2006. С. 31-33.

6. Лошманов А.Ю., Буханько А.А. Прошивка жесткопластической полосы // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2006. С. 136-139.

7. Лошманов А.Ю. Анализ полей остаточных деформаций в задачах технологической теории пластичности // Научная конференция молодых учёных по механике сплошных сред, посвященная 80-летию со дня рождения чл.-корр. АН СССР А.А. Поздеева. Сборник научных трудов. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. С. 83-85.

8. Хромов А.И., Буханько А.А., Лошманов А.Ю. Течение жесткопластического материала по каналу постоянной высоты с круговым изгибом и угловой точкой // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева. № 1 (48), 2006. С. 147-150.

9. Лошманов А.Ю., Буханько А.А. Исследование полей деформаций в задаче о прессовании полосы // Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова: тезисы докладов. Владивосток: Дальнаука, 2004. С. 107-108.

10. Буханько А.А., Лошманов А.Ю. Поля деформаций в окрестности особенностей пластической области // Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения: Сборник докладов третьей конференции. Владивосток – Комсомольск-на-Амуре, сентябрь 2004 г. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2005. С. 233–241.

11. Лошманов А.Ю. Об одном решении задачи о растяжении полосы с V-образными концентраторами деформаций // XXX Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова: тезисы докладов. Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2005. С. 162-163.

12. Лошманов А.Ю. Расчет полей деформаций в пластических течениях с разрывным полем скоростей перемещений // XXXI Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова: тезисы докладов. Владивосток: Дальнаука, 2006. С. 138-139.

13. Буханько А.А., Лошманов А.Ю., Хромов А.И. Концентраторы деформации. Определение полей деформаций в их окрестности / Св-во о рег. прогр. для ЭВМ № 2005611824 от 25.07.2005.

*Личный вклад автора.* Работы [1, 3, 7, 11, 12] выполнены автором лично. В работах [2, 4-6, 8-10, 13] в рамках сформулированной научным руководителем проблемы автор получил необходимые для теоретического

анализа и численных расчетов соотношения и провел необходимые вычисления.

Лошманов Антон Юрьевич

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ТЕНЗОРОВ ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ С РАЗРЫВНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Автореферат

Подписано в печать 15 октября 2006 г.  
Формат 60\*84/16.

Усл. п. л. 0,8  
Тираж 100 экз.

Уч.-изд. л. 0,7  
Заказ 93

Издано в ИМиМ ДВО РАН. Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallургов, 1

Отпечатано участком оперативной печати ИМиМ ДВО РАН.  
Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallургов, 1