На правах рукописи

УШАКОВ Александр Александрович

САМОУРАВНОВЕШЕННЫЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Владивосток - 2006

Работа выполнена в Дальневосточном государственном техническом университете

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Гузев Михаил Александрович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Сумин Александр Иванович; кандидат физико-математических наук Ковтанюк Лариса Валентиновна.

Ведущая организация: Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре.

Защита состоится «22» ноября 2006 года в 14 часов на заседании регионального диссертационного совета ДМ 005.007.02 в Институте автоматики и процессов управления (ИАПУ) ДВО РАН по адресу:
690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5, комната 510.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИАПУ ДВО РАН.

Автореферат разослан «   » октября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.ф.-м.н. Дудко О.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Экспериментальное изучение материалов и конструкций показывает, что в них при механическом равновесии в отсутствии внешних сил могут существовать ненулевые напряжения. Описание таких напряжений с помощью теории упругости невозможно, поскольку в рамках этой теории их следует полагать равными нулю внутри тела и на его поверхности. Пути решения проблемы описания напряжений были предложены в физических теориях прочности и пластичности: отличные от нуля напряжения в условиях равновесия появляются при построении различных моделей дефектов кристаллической структуры материалов. Ненулевые внутренние напряжения, для которых суммарная сила и момент, действующие на произвольный объём внутри тела, равны нулю, называются самоуравновешенными. В общетеоретическом плане основным результатом исследований по построению моделей материалов с дефектами структуры является вывод о необходимости использовать при описании самоуравновешенных полей неевклидовые геометрические объекты (работы К. Кондо, Б. Билби, Э. Кренера, Л.И. Седова, С.К. Годунова, В.П. Мясникова, М.А. Гузева и др.).

Построение самоуравновешенных полей напряжений методами механики сплошной среды выполнялось в работах С.К. Годунова, В.П. Мясникова и М.А. Гузева, С.П. Киселёва, но систематического исследования этих полей не было дано.

Все вышесказанное позволяет сделать вывод об актуальности выбранной темы исследований в механике деформируемого твердого тела.

Цель работы: обобщить вариационный формализм механики сплошной среды с учетом самоуравновешенных полей, исследовать их структуру, установить связь с термодинамическими характеристиками.

Научная новизна диссертации состоит в следующем:

- в рамках вариационного формализма решена задача о структуре поля напряжений в сплошной среде с учетом самоуравновешенных полей;
- получено уравнение для внутренней метрики материала в предположении её изотропии;
- решена задача об аномальном распределении поля напряжений в цилиндрических образцах горных пород.

Достоверность полученных результатов определяется использованными подходами и методами механики сплошных сред, основанными на вариационном принципе.

Теоретическая значимость работы состоит в расширении вариационного формализма для модели сплошной среды, содержащей самоуравновешенные поля, построении новых самоуравновешенных полей напряжения.

Практическая значимость работы состоит в применении развитых подходов исследования самоуравновешенных полей для решения задачи об аномальном распределении поля напряжений в цилиндрических образцах горных пород.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Дальневосточной математической школе – семинаре имени Е.В. Золотова (Владивосток, 2003, 2006), Международной конференции по механике (Хабаровск, 2003), конференции «Вологдинские чтения» (Владивосток, 2004), на Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики», посвященной 70-летию со дня рождения Мясникова В.П. (Владивосток, 2006).

Отдельные результаты работы докладывались на научных семинарах лаборатории механики деформируемого твердого тела под руководством д.ф.-м.н., профессора А.А. Буренина (ИАПУ, Владивосток, 2005). В целом работа докладывалась на заседании кафедры прикладной математики и механики под руководством д.ф.-м.н., профессора В.В. Пикуля (ДВГТУ, Владивосток, 2006).

Диссертационная работа поддержана программой научных школ России-грант (НШ-9004.2006.1) и грантами: Президента РФ (N МД 362. 2003.05), РФФИ (N 02-01-01134) и ДВО(06-II-УО-01-001).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы (75 наименований). Общий объём работы - 102 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится краткий обзор литературы по проблеме самоуравновешенных напряжений в механике деформируемого твердого тела, обсуждается актуальность темы, представлено содержание диссертации по главам.

В первой главе диссертационной работы для сплошной среды, с учетом самоуравновешенных полей, построен функционал, получены уравнения механики сплошной среды и установлена связь этих полей с распределением энтропии.

Первый параграф носит вспомогательный характер: в нем показано, что уравнения механики сплошной среды получаются в рамках вариационного подхода, если определенным образом выбрать функционал и приравнять его вариацию нулю. Тогда получаемые уравнения Лагранжа для функционала дают уравнения механики сплошной среды, включая краевые условия. Для модели упругого тела в отсутствие внешних сил соответствующий функционал I имеет вид:

$$I = \int_V dV\left[r_0 U - r_0 T(s - s_0)\right], \qquad T = \frac{\partial U}{\partial s}, \tag{1}$$

где U - плотность внутренней энергии, r_0 - плотность сплошной среды, $(s - s_0)$ - отклонение энтропии от некоторого фиксированного значения, величина T называется абсолютной температурой.

В этом же параграфе приводится определение самоуравновешенности произвольного поля напряжений T_{ij}:

$$\int\limits_{\partial w} T_{ij} n_i dS = 0, \; M_{ij} = \int\limits_{\partial w} (T_{ik} x_j - T_{jk} x_i) n_k + \int\limits_{w} (T_{ji} - T_{ij}) dV = 0. \qquad (2)$$

С физической точки зрения первое условие в (2) означает, что суммарная сила, действующая на произвольный объём w, равна нулю. Второе условие означает обращение в нуль суммарного момента всех сил.

Класс самоуравновешенных напряжений достаточно широк. Показано, что компоненты

$$s_{ij} = 2 s_0 l^2 e_{ipq} e_{jmn} \frac{\partial \Gamma_{qm,p}}{\partial x^n} \qquad (3)$$

удовлетворяют условиям (2), где величина e_{ipq} - символ Леви-Чивита, постоянные s_0 и l имеют размерности напряжения и длины соответственно, а $\Gamma_{qm,p}$ - произвольные гладкие функции.

Во втором параграфе строится функционал для сплошной среды с учетом самоуравновешенных полей. С этой целью используется полевой подход. Согласно полевому подходу, полная плотность внутренней энергии U сплошной среды равна

$$U = U_1 + U_2 + U_{12},$$

где функция U_1- удельная внутренняя энергия упругого поля, U_2 учитывает дополнительную энергию среды, определяемую наличием в ней самоуравновешенных напряжений, U_{12} характеризует взаимодействие упругих и самоуравновешенных полей напряжений.

В качестве полевых переменных рассматриваются термодинамические параметры. Внутренняя энергия U_1 упругой среды полагается квадратичной функцией тензора малых деформаций e_{ij} и энтропии s, внутренняя энергия самоуравновешенных напряжений U_2 – квадратичной функцией энтропии s и дополнительных полевых переменных h_{ij}, а функция U_{12} - квадратичной от полевых переменных e_{ij} и h_{ij}. Полевые переменные h_{ij} совпадают с самоуравновешенным полем (3) при условии

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

и изотропии матрицы g_{ij}: $g_{ij} = g d_{ij}$. Тогда поля h_{ij} равны

$$h_{ij} = d_{ij}\Delta g - \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{4}$$

В третьем параграфе вычисляется вариация построенного функционала. При этом варьированию подвергаются компоненты вектора перемещений u^i, определяющего тензор малых упругих деформаций e_{ij}, и функция g (4). Из условий стационарности функционала получены уравнения и граничные условия. Показано, что поле напряжений Σ_{ij} равно сумме упругого p_{ij} и самоуравновешенного h_{ij} (4) полей:

$$\Sigma_{ij} = p_{ij} + n_2 h_{ij}, \; p_{ij} = d_{ij}(\Lambda_1 e_{kk} + N_1 h_{kk}) + 2m_1 e_{ij}.$$

В отсутствии внешних сил Σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия и нулевым условиям на границе:

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x^j} = 0, \qquad \Sigma_{ij} n^j = 0. \tag{5}$$

В четвертом параграфе обсуждается связь самоуравновешенных напряжений с энтропией.

В пятом параграфе показано, что если энтропия является неоднородной функцией пространственных координат, то компоненты упругого поля напряжений не удовлетворяют условиям совместности Сен-Венана.

В шестом параграфе получено уравнение для функции g (4).

Во второй главе построены аналитические решения однородных уравнений механики деформируемого твердого тела при отсутствии внешних сил.

В первом параграфе приведено решение, построенное С.К. Годуновым, и доказано, что компоненты тензора напряжений обладают свойством самоуравновешенности.

В том же параграфе приведено решение С.П. Киселёва для несимметричных самоуравновешенных полей напряжений. Следует отметить, что в обоих решениях самоуравновешенные поля удовлетворяют краевым условиям (5). Это означает, что нет необходимости вводить упругое поле p_{ij}, компенсирующее поверхностную составляющую самоуравновешенного поля напряжений.

Во втором параграфе в цилиндрической системе координат построены самоуравновешенные компоненты напряжения s_{ij}, удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия механики сплошных сред и однородным граничным условиям (5). Они имеют вид:

$$s_{jj} = J_0(ar)\cos j\ , \quad s_{rr} = \frac{J_1(ar)}{ar}\cos j\ ,$$

$$s_{rj} = \frac{J_1(ar)}{ar}\sin j\ , \quad s_{zz} = s_{rz} = s_{jz} = 0,$$

где $J_0(ar), J_1(ar)$ - функции Бесселя нулевого и первого порядков, коэффициент a совпадает с одним из ненулевых корней уравнения $J_1(aR)=0$, где R - радиус цилиндра.

В третьем параграфе на основе подхода, развитого в главе 1, построено решение уравнений равновесия в полярной системе координат. Компоненты тензора полных напряжений равны сумме компонент упругого и самоуравновешенного полей напряжения:

$$\Sigma_{rr} = Ar^{n-2}\cos nj + \frac{l^2}{r^2}\left(r\frac{dJ_n}{dr} - n^2 J_n \right)\cos nj \ ,$$

$$\Sigma_{jj} = -Ar^{n-2}\cos nj - \frac{l^2}{r^2}\left(r\frac{dJ_n}{dr} - n^2 J_n \right)\cos nj \ ,$$

$$\Sigma_{rj} = -Ar^{n-2}\sin nj + \frac{nl^2}{r^2}\left(r\frac{dJ_n}{dr} - J_n \right)\sin nj \ ,$$

где l - один из ненулевых корней уравнения $J_{n+1}(lR)=0$, R - радиус круга, параметр $A = n(n-1)J_n(lR)/\left(l^{n-2}R^n\right)$.

<u>В третьей главе</u> решена задача описания аномального поведения образцов горных пород на основе подходов, развитых при исследовании самоуравновешенных полей.

В первом параграфе приводится описание эксперимента по сжатию образов гранодиорита цилиндрической формы по стандартной методике с фиксированием деформаций тензорезисторами и использованием необходимой регистрирующей аппаратуры.

Во втором параграфе обсуждается математическая постановка задачи для описания результатов эксперимента.

В третьем параграфе строится приближенное решение задачи.

В четвертом параграфе вычислены феноменологические параметры модели на основе экспериментальных данных и проведен анализ полученных результатов.

В заключении сформулированы результаты, полученные в диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Построен вариационный функционал для сплошной среды с учетом самоуравновешенных напряжений, получены уравнения и граничные условия для этой модели. Показано, что полное напряжение в сплошной среде равно сумме упругого и самоуравновешенного полей.
2. Доказано, что неоднородность распределения энтропии в сплошной среде определяет несовместность поля упругих деформаций.
3. Получено уравнение для функции, определяющей структуру внутренней метрики g в сплошной среде с учетом самоуравновешенных напряжений.
4. В цилиндрической системе координат построено самоуравновешенное поле напряжений, удовлетворяющее нулевым краевым условиям.
5. Построено ненулевое решение в полярной системе координат, удовлетворяющее уравнениям равновесия и нулевым граничным условиям. Это решение совпадает с тензором полных напряжений, равным сумме упругого и самоуравновешенного полей.
6. В рамках предложенной постановки задачи построено решение для описания аномального поведения образцов горных пород, вычислены феноменологические параметры модели на основе экспериментальных данных.

ПУБЛИКАЦИИ ПО МАТЕРИАЛАМ ДИССЕРТАЦИИ

1. Гузев М.А., Мясников В.П., Ушаков А.А. Структурное описание материалов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Специальный выпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. 2003. С.256-268.

2. Гузев М.А., Мясников В.П., Ушаков А.А. Поля самоуравновешенных напряжений в сплошной среде // ПМТФ. 2004. Т.45, №4. С.121-130.

3. Гузев М.А., Макаров В.В., Ушаков А.А. Моделирование упругого поведения сжатых горных образцов в предразрушающей области // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2005. № 6. С.3-13.

4. Гузев М.А., Мясников В.П., Ушаков А.А. Структура поля самоуравновешенных напряжений в сплошной среде // Дальневосточный математический журнал, 2002. Т.3, №2. С.231-241.

5. Гузев М.А., Ушаков А.А. Ненулевые решения однородных уравнений равновесия механики деформируемого твердого тела // Труды Дальневосточной математической школы-семинара им. Е.В. Золотова. Владивосток, 2003. С. 111-112.

6. Гузев М.А., Макаров В.В., Ушаков А.А. и др. Моделирование поведения горных образцов в предразрушающей области // Вологдинские чтения: материалы конференции. Владивосток: ДВГТУ, 2004. С. 88-89.

7. Гузев М.А., Макаров В.В., Ушаков А.А. и др. Исследование закономерностей деформирования образцов сильно сжатых горных пород // Сборник докладов международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики». Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. ун-та, 2003. Т.1. С. 10-19.

8. Гузев М.А., Ушаков А.А. Об одном классе ненулевых решений однородных уравнений равновесия механики деформируемого твердого тела //

Фундаментальные и прикладные вопросы механики. Сборник трудов конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Мясникова В.П. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2006. С.43-44.

Личный вклад автора.

В работах [1 – 4, 6 – 7] автор участвовал в обсуждении проблем, построении аналитических решений и необходимых расчетах. В работах [5, 8] участвовал в постановке задач и построении аналитических решений.

УШАКОВ Александр Александрович

САМОУРАВНОВЕШЕННЫЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Автореферат

Подписано к печати 16.10.2006 г. Усл.п.л.0.6. Уч.-изд.л. 0.5.
Формат 60Х84/16. Тираж 100. Заказ 134.

Отпечатано в типографии Издательства ДВГТУ
г. Владивосток, Пушкинская, 10