

На правах рукописи

ЛЕЙЗЕРОВИЧ ГРИГОРИЙ САМУИЛОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
С НАЧАЛЬНЫМИ НЕПРАВИЛЬНОСТЯМИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук



Комсомольск-на-Амуре – 2010

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет" (ГОУВПО "КнАГТУ").

Научный консультант:	Заслуженный работник высшей школы РФ, доктор технических наук, профессор Тарануха Николай Алексеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В.А. Ковалев
	доктор физико-математических наук, доцент В.А. Козлов
	доктор технических наук, профессор Б.И. Друзь
Ведущая организация:	Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Защита состоится 08 апреля 2011 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета ДМ005.007.02 в Институте автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН по адресу: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5, E-mail: dm00500702@iacp.dvo.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН

Автореферат разослан " _____ " _____ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук



О.В. Дудко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Замкнутые тонкостенные круговые цилиндрические оболочки находят широкое применение в аэрокосмической и судостроительной промышленности, в других отраслях техники. В условиях эксплуатации оболочки обычно подвергаются действию интенсивных динамических, в частности периодических, нагрузок, что может привести к возникновению вибрационных хлопков, а также других сложных нестационарных процессов, нежелательных с точки зрения обеспечения их прочности. Поэтому понятен тот большой и постоянный интерес исследователей к проблемам динамики оболочек.

Во многих случаях решение проблемы динамической прочности оболочки связано с изучением взаимодействия ее упругих колебаний. Взаимосвязанными могут оказаться радиальные и продольные колебания, изгибные и радиальные и т. д. На практике чаще всего наблюдается взаимодействие изгибных форм колебаний (*сопряженных* и *несопряженных*). Это объясняется тем, что низшие частоты собственных изгибных колебаний оболочки, как правило, много меньше основных частот продольных, крутильных и радиальных колебаний.

Наиболее сильно взаимодействие изгибных форм проявляется при колебаниях оболочки с большими амплитудами и определенных соотношениях между собственными частотами, что создает известные предпосылки для перераспределения энергии между обобщенными координатами. Такая "перекачка" энергии, вследствие которой могут возникать интенсивные колебания по формам, непосредственно не возбуждаемым внешней нагрузкой, способна привести к аварийной ситуации.

Несмотря на важность проблемы взаимодействия форм колебаний оболочки, ей посвящено недостаточное количество научных исследований. Анализ выполненных работ показывает, что до настоящего времени некоторые фундаментальные вопросы остаются не до конца выясненными.

При изготовлении оболочки неизбежны отклонения от идеальной формы $w_0(x, y)$, называемые *начальными неправильностями*, *начальными несовершенствами*. Сильное влияние w_0 на устойчивость оболочки общеизвестно. Не менее сильно w_0 влияют и на динамическое поведение оболочки, в частности на ее собственные частоты, являющиеся, как и критическая нагрузка, интегральными характеристиками жесткости. Начальные неправильности оказывают влияние на формы собственных колебаний и их взаимодействие, на амплитудно-частотные кривые и т. д. Однако и это влияние изучено еще недостаточно.

Среди исследований, посвященных изучению влияния начальных неправильностей на изгибные колебания оболочек, наметилось два направления: "линейное" и геометрически "нелинейное". Математическая модель, как правило, базируется на известных уравнениях теории пологих оболочек. Оболочка считается свободно опертой по торцам. Анализ основывается на предварительном сведении континуальной оболочки к системе с конечным числом степеней свободы. Тангенциальные краевые условия удовлетворяются "в среднем".

В работах "линейного" направления установлено, что w_0 , соответствующие характеру волнообразования оболочки, связывают *сопряженные* изгибные формы. Частотный спектр *существенно расщепляется*, при этом основная частота *увеличивается* по сравнению со случаем идеальной оболочки. Однако эти выводы против-

речат известным опытным данным. Необходимо установить причины, приводящие к такому, вероятно ошибочному, результату, и получить новое решение задачи о влиянии w_0 на частоты и формы собственных колебаний (в том числе и при *точном* удовлетворении *тангенциальным* граничным условиям), находящееся в соответствии с реальным поведением оболочки.

В работах "нелинейного" направления устанавливается связь между амплитудой и частотой – в случае свободных колебаний оболочки, и амплитудой и параметрами внешнего периодического воздействия – в случае вынужденных колебаний. Несмотря на практическую важность полученных результатов, высокую степень разработанности ряда задач, некоторые фундаментальные вопросы и в этом направлении остаются невыясненными. Так, в научной литературе, по существу, отсутствует решение задачи об изгибных колебаниях свободно опертой по торцам относительно *короткой* оболочки при *точном* удовлетворении граничным условиям. Все известные решения получены на основе нелинейных конечномерных моделей, которые не отвечают условию свободного опирания торцов оболочки по *изгибающему моменту*. Тангенциальные краевые условия удовлетворяются при этом "в среднем". Поэтому эти модели, приводящие к *мягкой* скелетной кривой, правомерны только для относительно *длинных* оболочек. Попытки решить эту же задачу, используя конечномерные модели, удовлетворяющие всем граничным условиям, оказались безуспешными. Они всегда приводили к *жесткой* скелетной кривой, *качественно* не согласующейся с известными опытными данными. Сложилась парадоксальная ситуация, при которой все усилия по уточнению конечномерной модели оболочки приводят к потере ее адекватности.

Требуется установить причины, приводящие к такому неожиданному результату. Необходимо разработать *новый подход* к построению нелинейной конечномерной модели оболочки *любой* длины (с w_0 или без) и получить *новое* решение задачи о колебаниях оболочки с *большими* амплитудами при *точном* удовлетворении *всем* граничным условиям, в том числе и *тангенциальным*.

Целью диссертации является теоретическое исследование в линейной и геометрически нелинейной постановках недостаточно изученного влияния начальных неправильностей на свободные и вынужденные (периодические) изгибные колебания тонкостенных круговых цилиндрических оболочек; развитие положений этого раздела механики деформируемого твердого тела; уточнение математической модели и уже известных решений; получение новых научных результатов и предложение рекомендаций по их использованию.

Научная новизна. *Традиционная* математическая модель исследования динамических характеристик оболочек с начальными неправильностями состоит, как правило, из следующих частей: *уравнения нелинейной теории пологих оболочек; граничные и начальные условия; конечномерная модель оболочки*, позволяющая свести задачу о колебаниях континуальной оболочки к системе динамических (модальных) уравнений, описывающих движение ее дискретной модели; *модальные уравнения*, из анализа которых определяются динамические характеристики оболочки. Все части этой математической модели, за исключением *первой*, в настоящей диссертационной работе *уточняются*.

Одной из важнейших частей математической модели является конечномерная модель оболочки. *Традиционный* подход к ее построению основан на следующем. В

линейной постановке считается, что w_0 приводят к взаимодействию сопряженных изгибных форм. В нелинейной постановке, помимо упомянутого взаимодействия, подход предполагает и некоторые *геометрические* модельные представления о деформировании оболочки при больших прогибах (*нерастяжимость контура поперечного сечения срединной поверхности оболочки, "преимущественное выпучивание вовнутрь"*). В диссертационной работе показано, что в линейной постановке этот подход приводит к результатам, которые не согласуются с известными опытными данными, а в нелинейной постановке – к непреодолимым проблемам, связанным с удовлетворением граничным условиям.

Автором предлагается *новый подход* к построению конечномерной модели оболочки. Он предполагает, что возбуждение *изгибных* колебаний оболочки по одной из собственных форм приводит к возникновению *радиальных* колебаний, которые, в свою очередь, генерируют *сопряженную* изгибную форму. В линейной постановке механизм, "запускающим" такое взаимодействие форм колебаний, являются неизбежные начальные неправильности, а при колебаниях с большими амплитудами – начальные несовершенства и/или нелинейность оболочки.

Движение оболочки, согласно предлагаемому подходу, напоминает описанное Х. Гюйгенсом явление самосинхронизации двух маятников, установленных на общем *податливом* основании, когда колебания одного маятника вызывает некоторое движение основания, а последнее, в свою очередь, возбуждает колебания второго маятника. Новый подход реально отображает физические процессы, происходящие при колебаниях оболочки (радиальные колебания оболочки были идентифицированы и измерены, например, М. Олсоном).

На основе уточненной математической модели в работе в линейной и геометрически нелинейной постановках выполнено исследование влияния:

- *начальных отклонений* от идеальной круговой формы, *малой присоединенной массы* и *разнотолщинности* на свободные и вынужденные изгибные колебания бесконечно длинной оболочки (кольца при плоской деформации);
- *осесимметричной начальной погиби* на взаимодействие малых *радиальных* и *продольных* колебаний оболочки;
- *статической нагрузки, формулировки граничных условий* (в том числе и *тангенциальных*), *осесимметричных* и *асимметричных* начальных неправильностей на свободные и вынужденные изгибные колебания оболочки.

Новый подход к построению конечномерной модели оболочки может быть, по мнению автора, использован и при изучении широкого круга проблем, близких к проблемам, затрагиваемым в настоящей диссертации: устойчивость оболочек, параметрические колебания, панельный флаттер и др.

Автор защищает:

- уточненную математическую модель;
- методику оценки влияния начальных неправильностей на линейные и нелинейные динамические характеристики оболочки конечной длины, а также кольца при плоской деформации;
- результаты решения многочисленных новых задач динамики оболочек с динамической асимметрией, а также качественные и количественные уточнения, внесенные в уже известные решения.

Достоверность исследования. Результаты работы основываются на строго доказанных выводах фундаментальных и прикладных наук. Они получены с помощью известных, проверенных практикой, теоретических методов исследования. Результаты работы многократно сопоставляются с численными результатами, полученными методом конечных элементов в MSC/NASTRAN, с надежными опытными данными, а также с результатами известных теоретических исследований, выполненных другими авторами. Проверка адекватности конечномерной модели оболочки осуществляется контролем предельных переходов, выполнением граничных условий, соответствием здравому смыслу и др.

Практическое значение. Новые теоретические положения и результаты работы свидетельствуют о том, что во многих случаях нельзя пренебрегать влиянием начальных неправильностей, неизбежных у реальной оболочки, на ее динамические характеристики. Предложенная методика, позволяющая с достаточной степенью точности оценить влияние w_0 , может быть в первом приближении использована при выполнении динамических расчетов реальных оболочек, применяемых в ракетостроении, судостроении и других отраслях техники.

С технической точки зрения очень важно знать фактические начальные несовершенства оболочки для возможности предсказания ее поведения. Прямой подход, который используется в настоящее время для контроля формы оболочек, сложен и требует длительных измерений. В известной работе А. Розена и И. Зингера предложен косвенный подход, позволяющий дать предварительную оценку величины начальных несовершенств по отклонению основных частот несовершенной и идеальной оболочек. Результаты настоящей работы, могут быть использованы для осуществления и дальнейшего развития косвенного подхода, а также для определения фактических условий закрепления торцов оболочки.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертации докладывались на совместном заседании кафедр теории и проектирования корабля, механики деформируемого твердого тела и конструкции судов ДВГТУ (1999), семинаре ИММ ДВО РАН (2000), семинаре отдела механики деформируемого твердого тела Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (2000), заседании диссертационного совета по динамике и прочности машин при МГТУ им. Н.Э. Баумана (2001), семинарах ИАПУ ДВО РАН (2000, 2009). Автором сделаны доклады на Всесоюзной научно-технической конференции "Проблемы прочности и надежности конструкций перспективных транспортных судов и плавучих сооружений" (Ленинград, 1979), V Всесоюзной конференции "Статика и динамика пространственных конструкций" (Киев, 1985), Всесоюзной конференции "Актуальные проблемы прочности в машиностроении" (Севастополь, 1989), международной конференции "Кораблестроение и океанотехника. Проблемы и перспективы" (Владивосток, 1998), международной научной конференции "Синергетика. Самоорганизующиеся процессы в системах и технологиях" (Комсомольск-на-Амуре, 1998), международной конференции "Проблемы прочности и эксплуатационной надежности судов" (Владивосток, 1999), XIX международной конференции "Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов" (Санкт-Петербург, 2001), конференции по строительной механике корабля, посвященной памяти профессора П.Ф. Папковича (Санкт-Петербург, 2002), научной конференции "Фундаментальные и прикладные вопросы механики" (Хабаровск, 2003), региональ-

ной научно-технической конференции с международным участием "Кораблестроительное образование и наука – 2003" (Санкт-Петербург, 2003), XXI международной конференция по теории оболочек и пластин" (Саратов, 2005), VIII всероссийской конференции "Нелинейные колебания механических систем" (Нижний Новгород, 2008), VII международной конференции по математическому моделированию (Ульяновск, 2009) и др.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2 монографиях и 49 научных статьях. В конце автореферата приведен список *основных* публикаций из 28 наименований.

Структура и объем диссертации. Текст диссертации, состоящей из введения, восьми глав, основных выводов и библиографического списка из 173 наименований, изложен на 329 страницах. Работа содержит 155 рисунков и 4 таблицы. К диссертации прилагаются три акта внедрения.

Работа выполнена в Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете при частичной поддержке гранта 2.1.2/3046 Министерства образования и науки РФ по целевой программе "Развитие научного потенциала высшей школы. Проведение фундаментальных исследований".

Выражаю признательность своему Учителю, ныне покойному, доктору технических наук, профессору *Владимиру Сергеевичу Калинин*.

Благодарю своего научного консультанта, доктора технических наук, профессора *Николая Алексеевича Тарануху* за многие полезные советы, которые способствовали написанию диссертации и подготовке ее к защите.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, выделены основные противоречия между традиционными теоретическими решениями и опытными данными, сформулирована цель работы, изложены положения, выносимые на защиту, приведено краткое содержание *восьми* глав диссертации.

В **обзоре работ (первая глава)** основное внимание сосредоточено на исследованиях, которые, по мнению автора, дают наиболее полное представление о рассматриваемой проблеме. Среди них можно выделить известные работы К.В. Аврамова, А.С. Вольмира, Э.И. Григолюка, Н.Ф. Гришина, И. Зингера, В.С. Калинина, И.Г. Кильдибекова, П.С. Ковальчука, В.Д. Кубенко, А.И. Маневича, О.П. Проценко, М. Амабили, Е. Рейсснера, Д. Эвенсена и многих др.

Анализ научной литературы показал, что, несмотря на относительно обширный перечень работ по динамике несовершенных оболочек, практическую значимость полученных результатов и высокую степень разработанности отдельных задач, некоторые *фундаментальные* вопросы остаются еще невыясненными. Отмечены основные проблемы, без решения которых невозможно прогнозировать резонансные ситуации, которые могут возникнуть при воздействии на реальную оболочку конечной длины динамических нагрузок. Сформулированы следующие задачи настоящего исследования.

1. Уточнить математическую модель. В частности, разработать *новый единый подход* к построению линейной и нелинейной конечномерных моделей тонкостенной круговой цилиндрической оболочки любой длины.

2. Установить механизм, приводящий к взаимосвязанности *сопряженных* изгибных форм идеальных и несовершенных оболочек.

3. Установить причины, приводящие в традиционном решении к *существенной* расстройке изгибного частотного спектра несовершенной оболочки, противоречащей известным опытным данным, а также к ошибочному выводу об *увеличении* частоты основного тона по сравнению со случаем идеальной оболочки.

4. Получить *новое* решение задачи о *собственных* изгибных колебаниях несовершенной оболочки, приводящее результаты теоретического анализа в соответствии с реальным поведением оболочки и здравым смыслом.

5. Исследовать влияние *малой присоединенной массы* на частоты и формы *собственных* колебаний тонкого кольца при плоской деформации, а также совместное влияние w_0 и массовых включений на расщепление частотного спектра.

6. Оценить влияние малой *разнотолщинности* на линейные и нелинейные динамические характеристики тонкого кругового кольца.

7. Изучить связанность *радиальных* и *продольных* колебаний оболочки.

8. Решить задачу о *нелинейных* изгибных колебаниях *свободно* опертой *идеальной* круговой цилиндрической оболочки *конечной* длины при *точном* удовлетворении всем граничным условиям, в том числе и *тангенциальным*.

В настоящее время при определении *нелинейных* динамических характеристик такой оболочки условие отсутствия *изгибающего момента* по торцам *не выполняется*, а *тангенциальные* краевые условия удовлетворяются "*в среднем*". В задачах устойчивости оболочки с этим еще можно согласиться, поскольку при ее прощелкивании в продольном направлении возникает *несколько* полуволн, и поэтому ограничения, накладываемые закреплениями торцов на краевые волны, мало влияют на окончательный результат. В задачах динамики – нельзя, так как при колебаниях оболочки вблизи зоны *главного* резонанса в продольном направлении образуется *только одна* полуволна.

9. Исследовать влияние *асимметричных* и *осесимметричных* начальных неправильностей, а также *статической* нагрузки на *линейные* и *нелинейные* динамические характеристики оболочки *конечной* длины.

Вторая глава посвящена математической модели. Приводятся основные уравнения и зависимости нелинейной теории гибких пологих оболочек. Изгибные колебания оболочки с $w_0(x, y)$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} [L(w_0 + w, w_0 + w) - L(w_0, w_0)] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(\Phi, w_0 + w) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ∇^4 ; L – известные дифференциальные операторы; $w(x, y, t)$ – прогиб; $\Phi(x, y, t)$ – функция напряжений; $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; h – толщина стенки; R – радиус; ρ – массовая плотность; $q(x, y, t)$ – поперечная нагрузка; t – время.

В настоящее время уравнения (1) являются одними из основных при определении *линейных* и *нелинейных* динамических характеристик оболочки с w_0 . Основы этого варианта теории оболочек были заложены в работах Л.Г. Доннелла, Х.М.

Муштари и В.З. Власова. Справедливость и пределы его применимости обсуждаются во многих статьях и монографиях. В работах И.И. Воровича и В.И. Седенко дано строгое математическое обоснование возможности использования этой теории для анализа изгибных колебаний тонкостенных оболочек с *большими* амплитудами. Считается, что эта теория, опирающаяся на гипотезу Кирхгофа – Лява, дает надежные результаты, близкие к экспериментальным данным, при определении *интегральных* характеристик, в частности *низших* частот собственных изгибных колебаний тонких изотропных оболочек.

Далее в главе формулируются граничные условия, в том числе и тангенциальные. Особое внимание уделено выбору конечномерной модели оболочки. Предлагается *новый* подход к ее построению, предполагающий *взаимодействие изгибных колебаний с радиальными*. Сопоставляются *традиционные* и *новые модальные уравнения*, из которых в дальнейшем определяются динамические характеристики оболочки. Отмечается, что в *новых* уравнениях связь между сопряженными изгибными формами носит *инерционный*, а не *упругий* характер.

В *третьей главе*, являющейся *ключевой*, установлены причины, приводящие в *традиционном* решении для *несовершенной* оболочки к *существенной* расстройке изгибного частотного спектра, а также к ошибочному выводу об *увеличении* основной частоты по сравнению со случаем идеальной оболочки. На примере рассмотрения более простой (предельной) задачи о влиянии $w_0(y)$ на изгибные колебания *бесконечно длинной* оболочки (*кольца* при плоской деформации) продемонстрированы неточности, допущенные в предыдущих исследованиях. Задача имеет и самостоятельное значение, поскольку ее результаты могут быть использованы для определения динамических характеристик несовершенного *кольца*. Кроме того, как известно, результаты предельной задачи, полученные независимо от анализа общего случая, являются полезным средством контроля правильности общих решений, найденных в последующих главах диссертации.

В *первом разделе* изучаются *собственные* колебания кругового кольца с

$$w_0(y) = ha_0 \sin(\beta_0 y + \varphi_0); \quad \beta_0 = n_0/R, \quad (2)$$

где a_0 – амплитуда; n_0 – число окружных волн; φ_0 – начальный фазовый угол.

Уравнения движения получены из (1) при $l \rightarrow \infty$. Их точность ограничена теми же пределами, что и точность исходных уравнений. Целью главы является получение не столько количественной, сколько *качественной* оценки влияния $w_0(y)$ на колебания кольца при соблюдении условия $n^2 \gg 1$, которое, как известно, всегда выполняется при колебаниях тонких оболочек конечной длины.

Традиционная *линейная* конечномерная модель кругового кольца с начальными *неправильностями* имеет вид:

$$w(y, t) = h[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y]; \quad \beta = n/R, \quad (3)$$

где сопряженные изгибные формы $\sin \beta y$, $\cos \beta y$, характеризуемые одним и тем же числом волн n , являются формами собственных колебаний идеального кольца. Для идеального кольца этим формам соответствует одна и та же частота.

Автором предлагается *уточнение* конечномерной модели (3). Считается, что *неизбежные начальные неправильности являются механизмом, запускающим взаимодействие изгибных колебаний кольца с радиальными*.

В этом случае прогиб кольца аппроксимируется выражением

$$w(y,t) = h[a(t)\sin(\beta y + \varphi) + \Psi(t)] = h[a_1(t)\sin \beta y + a_2(t)\cos \beta y + a_3(t)], \quad (4)$$

где $a_1(t) = a(t)\cos \varphi$; $a_2(t) = a(t)\sin \varphi$, а координата $\Psi(t) = a_3(t)$ соответствует радиальным колебаниям несовершенного кольца.

Сначала приводится *традиционное* решение задачи ($n_0 = n$). Методом Бубнова – Галеркина получена система двух *связанных* модальных уравнений:

$$\ddot{a}_1 + (1 + 6a_0^2 \cos^2 \varphi_0) a_1 + 3a_0^2 \sin 2\varphi_0 a_1 = 0; \quad \ddot{a}_2 + 3a_0^2 \sin 2\varphi_0 a_1 + (1 + 6a_0^2 \sin^2 \varphi_0) a_2 = 0, \quad (5)$$

в которой точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \lambda t$ (λ – собственная частота *идеального* кольца).

Из (5) видно, что связь между сопряженными изгибными формами является *упругой*. Уравнения, подобные (5), могут быть получены при $l \rightarrow \infty$ из уравнений известных работ Н.Ф. Гришина, В.Д. Кубенко и др.

Найдены квадраты безразмерных собственных частот кольца с $w_0(y)$:

$$\Omega_{01k}^2 = (\omega_{01k}/\omega) = 1; \quad \Omega_{02k}^2 = (\omega_{02k}/\omega) = 1 + 6a_0^2, \quad (6)$$

где индекс "k" означает, что решение является *традиционным*, а квадрат безразмерной собственной частоты *идеального* кольца равен

$$\omega^2 = \rho R^2 (1 - \mu^2) \lambda^2 / E = \varepsilon / 12; \quad \varepsilon = (n^2 h / R)^2. \quad (7)$$

Из (6) видно, что частотный спектр *несовершенного* кольца, всегда *удваивается*. Низшая частота Ω_{01k} не зависит от амплитуды начальных отклонений a_0 , а вторая частота Ω_{02k} значительно превышает частоту *основного* тона *идеального* кольца. Расстройка квадратов собственных частот может быть очень *существенной*. Например, при амплитуде $a_0 = 1$ она равна $\Delta_k = \Omega_{02k}^2 - \Omega_{01k}^2 = 6$.

Далее приводится решение задачи, основанное на *уточненной* конечномерной модели (4). Сформулированы и доказаны следующие предположения.

Предположение 1. *Отклонения, не соответствующие характеру волнообразования кольца ($n_0 \neq n$), не влияют на его динамические характеристики.*

Предположение 2. *Начальные неправильности, соответствующие характеру волнообразования кольца ($n_0 = n$), при произвольных начальных условиях приводят к **связанным изгибно-радиальным** колебаниям.*

Предположение 3. *Механизмом, запускающим взаимодействие изгибных и радиальных колебаний, являются начальные неправильности, неизбежные у реального кругового кольца.*

Предположение 4. *Начальные неправильности, соответствующие характеру волнообразования кольца, приводят к расщеплению изгибного частотного спектра. Значения расщепленных собственных частот не зависят от начала отсчета несовершенств и их расстройка **незначительна**.*

Предположение 5. *Низшая из расщепленных собственных частот несовершенного кольца всегда **меньше** собственной частоты идеального кольца.*

При доказательстве предположений 4 и 5 использовано допущение о *нерастяжимости* контура несовершенного кольца. Получены следующие выражения для квадратов безразмерных собственных частот:

$$\Omega_{01}^2 = (\omega_{01}/\omega)^2 = 1 - \varepsilon a_0^2 / 2; \quad \Omega_{02}^2 = (\omega_{02}/\omega)^2 = 1 = \Omega_{01k}, \quad (8)$$

Движение несовершенного кольца с первой собственной частотой ω_{01} представляет собой *связанные изгибно-радиальные* колебания:

$$w_1(y, t) = ha_1 [\sin(\beta y + \varphi_0) + \varepsilon^{0,5} a_0 / 2] \sin(\omega_{01} t + \phi_1). \quad (9)$$

Колебания кольца со второй частотой ω_{02} происходят по форме, сдвинутой по отношению к первой изгибной форме на угол $\pi/2$, и *не сопровождаются* радиальными колебаниями:

$$w_2(y, t) = ha_2 \cos(\beta y + \varphi_0) \sin(\omega_{02} t + \phi_2). \quad (10)$$

Из (8) следует, что в *новом* решении начальные неправильности всегда *уменьшают* низшую частоту Ω_{01} по сравнению со случаем идеального кольца.

Энергетическая оценка влияния $w_0(y)$ подтвердила этот вывод.

Эффект расщепления частотного спектра представлен на рис. 1. Расчеты выполнены при $\varepsilon = 0,25$. Сплошная горизонтальная линия $\Omega = 1$ соответствует собственной частоте идеального кольца. *Новому* решению $\Omega_{01}(a_0, \varepsilon)$ и $\Omega_{02}(a_0, \varepsilon) = \Omega = 1$ отвечают пунктирная и горизонтальная линии. Для возможности сопоставления результатов *нового* и *традиционного* решений на рисунке показаны графики частот $\Omega_{01k}(a_0, \varepsilon) = \Omega_{02}(a_0, \varepsilon) = \Omega = 1$ и $\Omega_{02k}(a_0, \varepsilon)$ (штриховая линия), вычисленных по формулам (6). Видно, что в *новом* решении расстройка собственных частот *незначительна*, что создает известные предпосылки для интенсивного энергообмена между сопряженными изгибными формами.

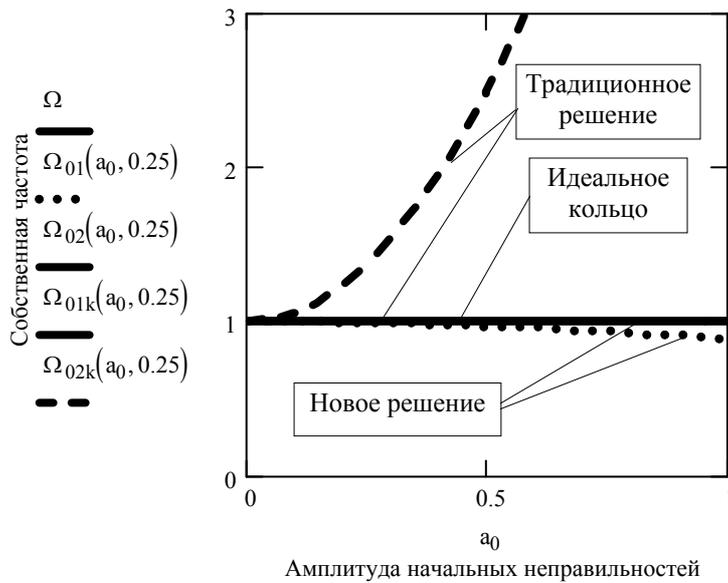


Рис. 1. Расщепление изгибного частотного спектра

Предположение 6. *Начальные отклонения, соответствующие характеру волнообразования кольца, приводят к взаимодействию сопряженных изгибных форм, а также к фиксации положения узлов этих форм в окружном направлении. Каждой из сопряженных изгибных форм соответствует своя собственная частота.* Это предположение объясняет эффект биения, обнаруженный в экспериментах с оболочками конечной длины. Заметим также, что для идеального кольца каждая точка окружности может стать узлом колебаний.

Предположение 7. *Возбуждение колебаний несовершенного кольца по одной из собственных изгибных форм приводит к возникновению радиальных колебаний, которые, в свою очередь, генерируют сопряженную изгибную форму. Иными словами, радиальные колебания являются механизмом, запускающим взаимодействие сопряженных изгибных форм.* Таким образом, движение несовершенного кольца

напоминает описанное Х. Гюйгенсом явление самосинхронизации двух маятников, установленных на общем *податливом* основании.

При доказательстве последнего предположения допущение о *нерастяжимости* контура кольца было опущено. Ортогонализация уравнения движения к форме прогиба (4) привела к *трем* связанным модальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + a_1 + \varepsilon^{0,5} a_0 \ddot{a}_3 \cos \varphi_0 = 0; \quad \ddot{a}_2 + a_2 + \varepsilon^{0,5} a_0 \ddot{a}_3 \sin \varphi_0 = 0; \\ \ddot{a}_3 + 12a_3/\varepsilon - 6a_0(a_1 \cos \varphi_0 + a_2 \sin \varphi_0)/\varepsilon^{0,5} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдены следующие значения квадратов собственных частот:

$$\Omega_{01}^2 \approx 1 - \varepsilon a_0^2/2; \quad \Omega_{02}^2 = 1; \quad \Omega_{03}^2 \approx 12/\varepsilon + 6a_0^2. \quad (12)$$

Первым двум частотам соответствуют преимущественно *изгибные*, а третьей – преимущественно *радиальные* колебания кольца. Выражения для Ω_{01} и Ω_{02} совпадают с (8), что свидетельствует о том, что колебания кольца происходят практически *без растяжения* его контура. Частота преимущественно радиальных колебаний Ω_{03} увеличивается с ростом амплитуды начальных несовершенств.

Анализ третьего уравнения (11) показывает, что его первое *инерционное* слагаемое намного меньше двух остальных. Это обстоятельство объясняется, в частности, тем, что квадрат *радиальной* парциальной частоты, равный $12/\varepsilon$, значительно превышает квадрат *изгибной* парциальной частоты. Тогда, пренебрегая первым слагаемым в третьем уравнении (11), можно найти, что

$$a_3 \approx \varepsilon^{0,5} a_0 (a_1 \cos \varphi_0 + a_2 \sin \varphi_0)/2 = \varepsilon^{0,5} a_0 a \cos(\varphi_n - \varphi_0)/2. \quad (13)$$

Определив вторую производную \ddot{a}_3 по выражению (13) и подставив ее значение в первые два уравнения (11), приходим к двум модальным уравнениям относительно координат a_1 и a_2 , которые полностью совпадают с уравнениями, описывающими колебания кольца с $w_0(y)$ без растяжения его контура.

Показано, что пренебрежение первым малым слагаемым в третьем уравнении (11) вовсе не означает, что и в первых двух уравнениях можно принять $\ddot{a}_3 = 0$, как это часто делается для упрощения *нелинейных* модальных уравнений, описывающих колебания оболочки *конечной* длины, в соответствии со "статическим" приемом, предложенным А.С. Вольмиром.

В заключение *первого раздела* динамические характеристики несовершенного кольца определены МКЭ в среде пакета MSC/NASTRAN. Численные расчеты подтвердили адекватность новой *линейной* конечномерной модели.

Во *втором разделе третьей* главы предлагается *новый* подход к построению *нелинейной* конечномерной модели *идеального* кругового кольца. Считается, что возбуждение изгибных колебаний кольца с *большими* амплитудами по одной из собственных форм (например, по форме $\sin \beta y$) приводит к возникновению *радиальных* колебаний, которые, в свою очередь, смещают возбуждаемую изгибную форму в окружном направлении на угол $\varphi(t)$. В этом случае прогиб кольца аппроксимируется выражением

$$w(y,t) = h[a(t) \sin[\beta y + \varphi(t)] + \Psi(t)], \quad (14)$$

где второе слагаемое соответствует *радиальным* колебаниям.

Введя обозначения $a_1(t) = a(t) \cos \varphi(t)$; $a_2(t) = a(t) \sin \varphi(t)$; $a_3(t) = \Psi(t)$, прогиб (14) можно представить и в виде

$$w(y, t) = h[a_1(t)\sin \beta y + a_2(t)\cos \beta y + a_3(t)]. \quad (15)$$

Сформулированы и доказаны следующие два предположения.

Предположение 1. *Геометрическая нелинейность кольца является механизмом, запускающим взаимодействие его изгибных и радиальных колебаний.*

Предположение 2. *Возбуждение нелинейных изгибных колебаний кольца по одной из собственных форм приводит к возникновению радиальных колебаний. Последние колебания, в свою очередь, генерируют сопряженную изгибную форму. Таким образом, радиальные колебания выступают в качестве своеобразной **инерционной** связи между сопряженными изгибными формами.*

Колебания идеального кольца с большими амплитудами также напоминают описанное Х. Гюйгенсом явление самосинхронизации двух маятников.

В *третьем разделе* изучаются свободные нелинейные колебания кольца с начальными неправильностями. Прогиб аппроксимируется выражением (15).

Анализ динамических уравнений показывает, что взаимодействие изгибных колебаний с радиальными, а также связанность сопряженных изгибных форм обусловлены как нелинейностью кольца, так и наличием $w_0(y)$.

Динамические характеристики определены методом Рунге – Кутта и сопоставлены с решениями, найденными методами Бубнова – Галеркина и Крылова – Боголюбова. Квадраты безразмерных частот свободных *нелинейных* колебаний несовершенного кольца вычисляются по следующим формулам

$$\begin{aligned} \Omega_1^2(A_1) &= (\tilde{\omega}_1/\omega)^2 = \Omega_{01}^2 [1 - \varepsilon \Omega_{01}^2 (1 + \kappa_{21}^2) A_1^2 / 4] \\ \Omega_2^2(A_2) &= (\tilde{\omega}_2/\omega)^2 = \Omega_{02}^2 [1 - \varepsilon \Omega_{02}^2 (1 + 1/\kappa_{22}^2) A_2^2 / 4] \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ – нелинейные частоты; A_1 и A_2 – амплитуды свободных колебаний; $\kappa_{21} = a_{20}/a_{10}$ и $\kappa_{22} = -a_{10}/a_{20}$ – коэффициенты собственных форм.

Скелетные кривые (16) относятся к *мягкому* типу. Вследствие $w_0(y)$ они смещаются в зону *меньших* частот. Расстройка нелинейных частот усиливается с ростом амплитуды начальных неправильностей и/или параметра ε .

Показано, что изгибные колебания тонкого кольца с большими амплитудами происходят практически *без растяжения* его контура.

В *четвертом разделе* изучаются *вынужденные* нелинейные колебания кольца. Считается, что нагрузка "резонансно" распределена по отношению к одной из изгибных форм: $q(y, t) = q \sin \beta y \cos \Theta t$. Рассматриваются колебания вблизи зоны главного резонанса ($\Omega = \Theta/\lambda \approx 1$), где имеет место наиболее сильная связь и энергообмен между сопряженными изгибными формами. Периодические решения найдены методом Крылова – Боголюбова. Показано, что колебания могут представлять собой либо движение по *одной* изгибной форме, непосредственно возбуждаемой нагрузкой ($a_1(\tau) = A_1 \cos \Omega \tau$; $a_2(\tau) = 0$ – *симметричная реакция*), либо бегущую волну ($a_1(\tau) = A_1 \cos \Omega \tau$; $a_2(\tau) = A_2 \sin \Omega \tau$ – *несимметричная реакция*), когда возбуждаются обе изгибные формы, либо нестационарные процессы перестройки от одного режима движения к другому. Для ответа на вопрос о реализуемости того или иного режима движения исследована его устойчивость.

Амплитудно-частотная характеристика *симметричной* реакции тонкого несовершенного кольца показана на рис. 2 жирными линиями.

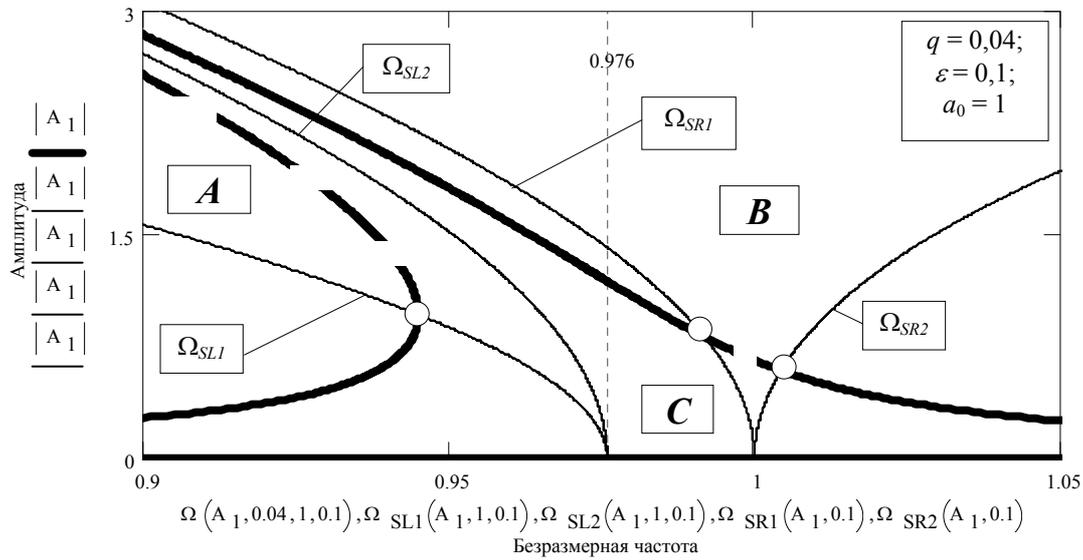


Рис. 2. Симметричная реакция несовершенного кольца

Расчеты выполнены при $a_0 = 1$; $\varepsilon = 0,1$; $q = 0,04$. Тонкие сплошные линии ограничивают две области неустойчивости. Область A является классической для системы с одной степенью свободы при мягкой характеристике. Ее правая граница $\Omega_{SL2}(A_1, a_0, \varepsilon)$ совпадает со скелетной кривой несовершенного кольца. Взаимодействие сопряженных изгибных форм обуславливает появление дополнительной области B . Ее левая граница $\Omega_{SR1}(A_1, a_0, \varepsilon)$ совпадает со скелетной кривой идеального кольца. Начальные отклонения приводит к разрыву этих областей. Ширина "трещины" (область C), в которой симметричная реакция устойчива, определяется расстройкой скелетных кривых идеального кольца и кольца с $w_0(y)$. Маркер установлен на нижней собственной частоте $\Omega_{01} = 0,976$. Вторая частота $\Omega_{02} = \Omega = 1$.

Рис. 3 демонстрирует влияние $w_0(y)$ на несимметричную реакцию кольца. Жирные линии соответствуют амплитуде сопряженной изгибной формы $\cos \beta y$, пунктирные – амплитуде непосредственно возбуждаемой формы $\sin \beta y$.

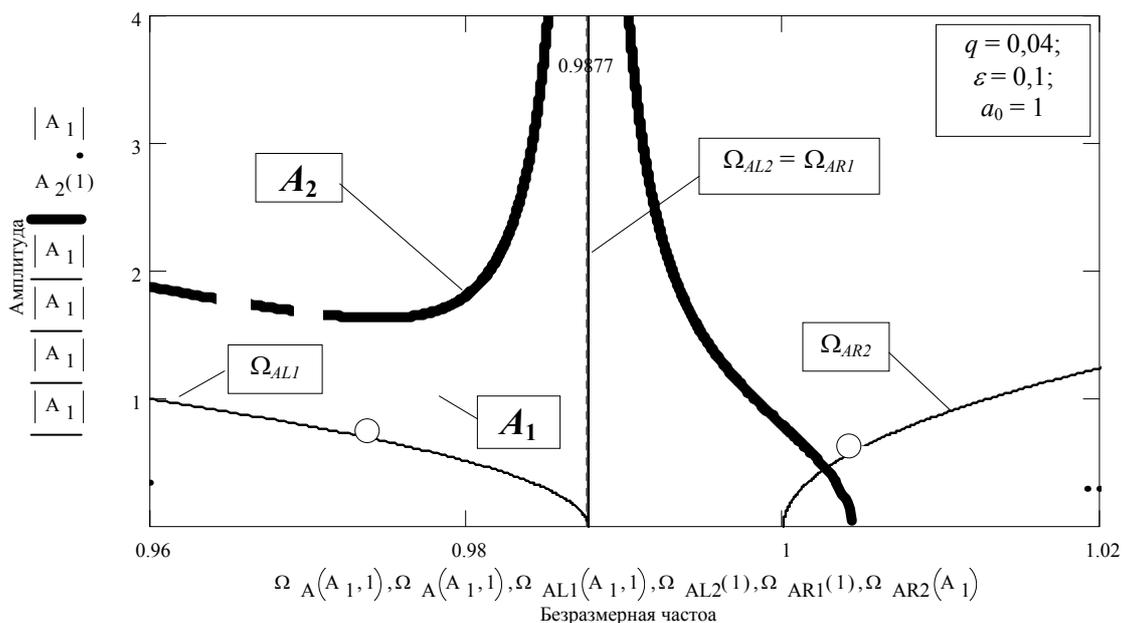


Рис. 3. Несимметричная реакция несовершенного кольца

Тонкими линиями показаны границы областей устойчивости двухмодового режима движения (режима бегущей волны). Маркер установлен на резонансной частоте $\Omega_c = 0,9877$. Индекс "A", добавленный частотам, соответствует *двухмодовому* режиму движения кольца.

На рис. 4 показано влияние начальных отклонений на амплитудно-частотные кривые для непосредственно возбуждаемой изгибной формы (жирные линии отвечают симметричной реакции, а пунктирные – несимметричной). Тонкими линиями показаны границы устойчивых режимов движения.

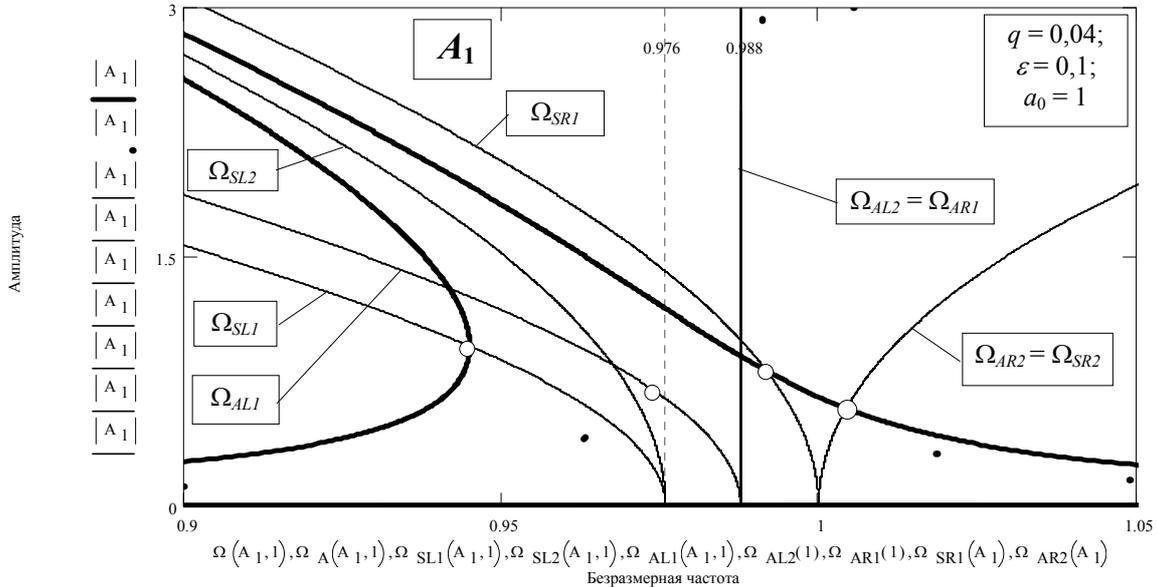


Рис. 4. Амплитудно-частотные кривые несовершенного кольца

Прохождение зоны главного резонанса происходит следующим образом. Сначала имеет место симметричная реакция. При $\Omega = \Omega_{SL1}$ амплитуда *стоячей* волны резко увеличивается, а затем, с ростом частоты вынуждающей нагрузки, начинает уменьшаться. При $\Omega_{AL1} < \Omega < \Omega_{AL2}$ реализуются и одномодовый режим движения, и режим *бегущей* волны. Последний становится неустойчивым при $\Omega = \Omega_{AL2}$. В диапазоне $\Omega_{AR1} < \Omega < \Omega_{SR1}$ имеют место обе реакции. При $\Omega = \Omega_{SR1}$ симметричная реакция, а при $\Omega = \Omega_{AR2} = \Omega_{SR2}$ несимметричная реакция становятся *неустойчивыми*. Наконец, при $\Omega > \Omega_{SR2}$ вновь реализуется движение типа *стоячей* волны.

В пятом разделе **третьей** главы изучается влияние малой разнотолщинности

$$h(y) = h[1 + 2(a_{10} \sin \beta_0 y + a_{20} \cos \beta_0 y)]; \quad \beta_0 = n_0/R; \quad n_0^2 \gg 1 \quad (17)$$

на вынужденные *нелинейные* колебания кольца. Прогиб представлен выражением (15). Координата $a_3(t)$ определена из условия *нерастяжимости* контура кольца. Модальные уравнения получены с помощью уравнений Лагранжа. Считается, что вынуждающая нагрузка "резонансно" распределена по отношению к изгибной форме $\sin \beta y$. Рассматривается случай, когда $n_0 = n$. Найдены собственные частоты: $\Omega < \Omega_{01} < \Omega_{02}$. Их расстройка увеличивается с ростом амплитуд a_{10} и/или a_{20} . При $a_{10} \neq 0, a_{20} \neq 0$ возбуждение формы $\sin \beta y$ приводит к возникновению сопряженной формы $\cos \beta y$ даже в *линейной* постановке. При $a_{10} \neq 0, a_{20} = 0$ (или наоборот) связь между сопряженными формами отсутствует, однако расщепление изгибного частотного спектра сохраняется.

Периодическое решение, соответствующее *главному* резонансу, найдено методом Крылова – Боголюбова. Исследована устойчивость одно- и двухмодового режимов движения. Сделан вывод о том, что *нелинейное* поведение разнотолщинного кольца аналогично поведению кольца с $w_0(y)$.

В этом же разделе приведены результаты расчета кольца переменной толщины, выполненные МКЭ в пакете MSC/NASTRAN. Показано, в частности, что при $n_0 = 2n$ несовершенства вида (17) *уменьшают* собственную частоту Ω_{01} по сравнению со случаем кольца постоянной толщины: $\Omega_{01} < \Omega < \Omega_{02}$.

В *шестом разделе третьей главы* изучаются *собственные* колебания кольца с начальными *неправильностями*, несущего *малую массу*. Показано, что присоединенная масса *усиливает* расстройку изгибного частотного спектра. Следовательно, устранить эффект его расщепления соответствующим подбором величины и точки крепления малой массы *не удастся*. *Традиционное* решение этой же задачи приводит к прямо противоположному результату, который является ошибочным.

В *первом разделе четвертой главы* приводятся результаты расчета *собственных* частот *идеальной* оболочки *конечной* длины, выполненных по точным уравнениям (соответствующим варианту теории оболочек В.В. Новожилова), уравнениям Доннелла – Муштари – Власова, при пренебрежении тангенциальными составляющими сил инерции, а также МКЭ в пакете MSC/NASTRAN. Как и в исследованиях, выполненных другими авторами, показано, что в широком диапазоне изменения параметров ε и $\theta = m\pi R/nl$, характеризующих относительную толщину и длину оболочки, теория Доннелла – Муштари – Власова дает значения всех трех собственных частот близкие к точным (причем две высшие частоты, соответствующие преимущественно продольным и крутильным колебаниям оболочки, по этим теориям практически неотличимы).

Во *втором разделе четвертой главы* изучается влияние осесимметричной начальной погиби на взаимодействие *радиальных* и *продольных* колебаний. Считается, что края оболочки шарнирно оперты и могут свободно смещаться в продольном направлении x . Начальная погибь имеет вид

$$w_0(x) = ha_{30} \sin^2 \alpha_m x; \quad \alpha_m = m\pi/l, \quad (18)$$

где a_{30} – безразмерная амплитуда погиби, положительная при направлении к оси оболочки; m – число полуволн.

Уравнения движения несовершенной оболочки записаны с учетом тангенциальной составляющей сил инерции. Их решение ищется в виде

$$u(x,t) = ha \cos \alpha_m x \cos \lambda_0 t; \quad w(x,t) = hc \sin \alpha_m x \cos \lambda_0 t, \quad (19)$$

где λ_0 – частота собственных колебаний оболочки с начальной погибью.

Найдены безразмерные частоты $\omega_{01} < \omega_{02}$ ($\omega_{0i}^2 = \rho R^2 (1 - \mu^2) \lambda_{0i}^2 / E$). Построены графики зависимости этих частот, а также отношения амплитуд $\kappa_0 = |a/c|$ от относительной длины оболочки $\xi = m\pi R/l$, ее толщины $\eta = h/R$ и амплитуды погиби a_{30} . Показано, что при $\xi \ll 1$, то есть для относительно длинных оболочек, и $\omega_0 = \omega_{01}$ продольные колебания преобладают над исчезающими радиальными, а при $\omega_0 = \omega_{02}$, наоборот, преобладают радиальные колебания оболочки. При $\xi \gg 1$ роли частот меняются. При $\xi = 1$ отношение амплитуд $\kappa_0 \approx 1$ при $\omega_0 = \omega_{01}$ и при

$\omega_0 = \omega_{02}$, что свидетельствует о *сильном* взаимодействии *радиальных* и *продольных* колебаний оболочки. Установлено, что погибь практически не влияет на частоты преимущественно *продольных* колебаний. При $\xi < 0,5$ частоты продольных колебаний *реальных* оболочек можно вычислять по *одномерной* стержневой теории с обычным модулем Юнга E , а при $\xi > 1,5$ – с приведенным $E^* = E/(1 - \mu^2)$. При $0,5 < \xi < 1,5$ ($l/R \approx 2,1 \div 6,3$) из-за *сильной* связи радиальных и продольных колебаний для определения частот надлежит применять теорию оболочек. В этом же диапазоне изменения параметра ξ нельзя пренебрегать *тангенциальными составляющими сил инерции* в уравнениях, описывающих *изгибные* колебания *несовершенной* оболочки. Показано, что осесимметричная погибь (независимо от ее направления) увеличивает частоты преимущественно *радиальных* колебаний. С ростом амплитуды погиби и/или параметров ξ и η это влияние усиливается.

Известно, что связанность радиальных и продольных колебаний *идеальной* оболочки обусловлена исключительно отличием коэффициента Пуассона μ от нуля. Установлено, что начальная погибь вида (18) эту связь может усилить, если $a_{30} < 0$, уменьшить при $a_{30} > 0$ и вовсе устранить, когда $a_{30} = 2\mu/\xi^2\eta$.

В *пятой главе* изучаются *собственные* колебания оболочки конечной длины с *асимметричными* начальными неправильностями. Анализ основывается на результатах и выводах *третьей* главы. Наряду с уже известными результатами, которые иногда существенно уточняются (как качественно, так и количественно), в главе представлены и результаты решения ряда новых задач.

В *первых двух разделах* представлено *традиционное* решение для *свободно* опертой по торцам оболочки. Прогиб в *первом* приближении имеет вид

$$w(y, t) = h[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y] \sin \alpha x; \quad \alpha = m\pi/l. \quad (20)$$

В задачах динамики оболочек наибольший практический интерес представляет основная частота, которой отвечает одна полуволна, образующаяся в продольном направлении. Этот случай, когда $m = 1$, в дальнейшем и изучается.

Рассмотрены два вида начальных неправильностей:

$$w_0(y) = ha_0 \sin(\beta y + \varphi_0) = h[a_{10} \sin \beta y + a_{20} \cos \beta y]; \quad (21)$$

$$w_0(x, y) = ha_0 \sin(\beta y + \varphi_0) \sin \alpha x = h[a_{10} \sin \beta y + a_{20} \cos \beta y] \sin \alpha x. \quad (22)$$

Тангенциальные граничные условия $N_1 = T = 0$ (N_1, T – погонные продольное и касательное усилия, соответственно) удовлетворены "*в среднем*".

Найдены собственные частоты: $1 < \Omega_{01k} = \omega_{01k}/\omega < \Omega_{02k} = \omega_{02k}/\omega$ (ω – безразмерная собственная частота *идеальной* оболочки). Показано, что несовершенства вида (21) и (22) *существенно* расщепляют частотный спектр, при этом основная частота *увеличивается* по сравнению со случаем *идеальной* оболочки.

В *третьем разделе* предлагается *уточнение* *линейной* конечномерной модели (20). Считается, что *асимметричные* начальные неправильности приводят к взаимодействию *изгибных* и *радиальных* колебаний оболочки.

Рассматривается *свободно* опертая по торцам оболочка, имеющая начальные неправильности в окружном направлении с числом волн n_0 :

$$w_0(y) = ha_0 \cos \beta_0 y; \quad \beta_0 = n_0/R. \quad (23)$$

Прогиб представляется в виде ряда

$$w(x, y, t) = \sin \alpha_m x \sum_n h [a_{1m,n}(t) \sin \beta_n y + a_{2m,n}(t) \cos \beta_n y + a_{3m,n}(t)], \quad (24)$$

где $a_{1m,n}$ и $a_{2m,n}$ отвечают *изгибным*, а $a_{3m,n}$ – *радиальным* колебаниям оболочки.

Уравнения теории пологих оболочек решены по схеме П.Ф. Папковича. Структура полученных динамических уравнений свидетельствует о *взаимосвязанности* изгибных форм с *разным* числом окружных волн n (*несопряженных* изгибных форм). Взаимодействие *сопряженных* изгибных форм при начальных неправильностях вида (23) *отсутствует*, однако *расщепление* изгибного частотного спектра имеет место. При $n = n_0$, а также при $n = 2n_0$ начальные отклонения приводят к связанным *изгибно-радиальным* колебаниям оболочки.

Далее анализируются частные случаи. Сначала в (24) удерживается только один члена ряда и считается, что $n_0 = n$. Найдены три собственные частоты: $\Omega_{01} < 1 \leq \Omega_{02} \ll \Omega_{03}$ (знак равенства имеет место для кольца). Первой частоте соответствуют преимущественно *изгибные*, второй – *чисто изгибные*, а третьей – *преимущественно радиальные* колебания оболочки. Установлено, что начальные отклонения от круговой формы всегда *уменьшают* основную частоту Ω_{01} по сравнению со случаем идеальной оболочки. При этом число волн n , соответствующее основной частоте, может *увеличиться*. Показано, что $\Omega_{02} = \Omega_{01k}$. График, иллюстрирующий расщепление изгибного частотного спектра, по виду аналогичен графику, изображенному на рис. 1. В новом решении расстройка частот Ω_{01} и Ω_{02} *незначительна*, что подтверждается и известными опытными данными. Показано, что частота преимущественно *радиальных* колебаний Ω_{03} всегда увеличивается по сравнению со случаем идеальной оболочки. Предельный переход к кольцу подтвердил адекватность *линейной* конечномерной модели (24).

Затем решение задачи получено при удержании в (24) нескольких членов ряда. Установлено, что *низшие* частоты собственных *изгибных* колебаний оболочки могут быть вычислены по *первому* приближению в широком диапазоне изменения параметров волнообразования $\varepsilon = n^4 (h/R)^2$ и $\theta = m\pi R/nl$.

В заключение раздела значения *собственных* частот оболочки с начальными неправильностями в окружном направлении были получены МКЭ в пакете MSC/NASTRAN. Так, для оболочки с параметрами: $l = 1,2$ м; $R = 2$ м; $h = 0,01$ м; $f_0 = 0,01$ м; $E = 2 \times 10^5$ МПа; $\rho = 0,00795$ Мн \times с²/м⁴; $\mu = 0,3$; $n = 10$ при краевых условиях Навье они оказались равными: $\lambda_{01} = 99,8$ Гц; $\lambda_{02} = 114$ Гц (основная частота *идеальной* оболочки – $\lambda = 114$ Гц). Теоретические значения соответствующих частот равны: $\lambda_{01} = 100$ Гц, $\lambda_{02} = 115$ Гц ($\lambda = 115$ Гц).

На рис. 5 показаны сопряженные *изгибные* формы оболочки с $w_0(y)$. Видно, что колебания оболочки с частотой $\lambda = \lambda_{01} = 99,8$ Гц сопровождаются заметными *радиальными* колебаниями (рис. 5, а). При колебаниях оболочки с частотой $\lambda = \lambda_{02} = 114$ Гц радиальные колебания отсутствуют (рис. 5, б).

В *четвертом* разделе изучается влияние начальных неправильностей, имеющих вид (22). Прогиб оболочки аппроксимируется выражением

$$w(x, y, t) = h \{ [a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y + a_3(t)] \sin \alpha x + a_4(t) \sin 3\alpha x \}. \quad (25)$$

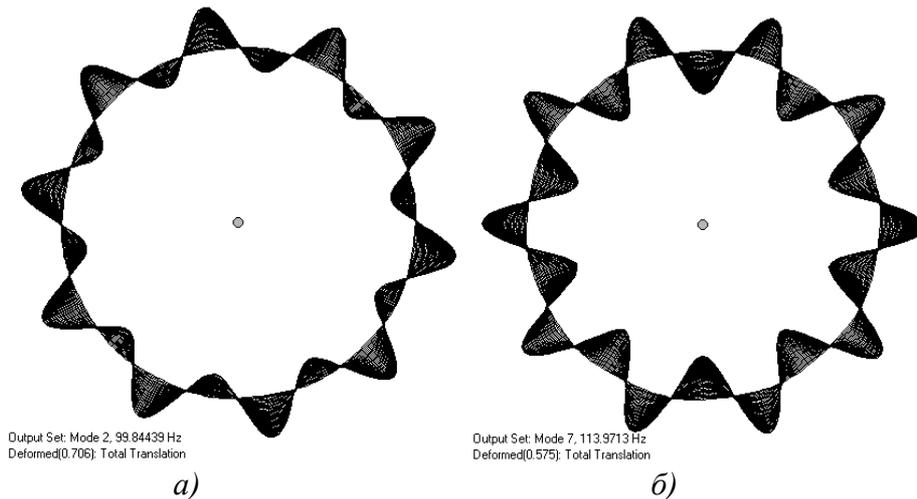


Рис. 5. Сопряженные изгибные формы несовершенной оболочки (МКЭ)

Решение уравнений теории пологих оболочек по схеме П.Ф. Папковича (при удовлетворении тангенциальным краевым условиям "в среднем") приводит к *четырем* связанным динамическим уравнениям. Найдены четыре собственные частоты $\Omega_{01} < 1 < \Omega_{02} \ll \Omega_{03} < \Omega_{04}$. Первым двум частотам соответствуют преимущественно изгибные, а третьей и четвертой – преимущественно радиальные колебания оболочки. Установлено, что начальные неправильности вида (22) *уменьшают* основную частоту Ω_{01} по сравнению со случаем идеальной оболочки. При этом число волн n , соответствующее основной частоте, может *увеличиться*. Показано, что $\Omega_{02} = \Omega_{01k}$. Расстройка изгибного частотного спектра увеличивается с ростом амплитуды начальных несовершенств, оставаясь все же *незначительной*. Частоты преимущественно *радиальных* колебаний Ω_{03} и Ω_{04} всегда увеличиваются по сравнению со случаем идеальной оболочки. Предельный переход к кольцу подтвердил адекватность *линейной* конечномерной модели (25).

В *пятом разделе пятой главы* продемонстрирована возможность упрощения системы модальных уравнений *уточненным* "статическим" приемом.

При исследовании изгибных колебаний оболочек обычно полагают, что их собственные частоты, отвечающие разным числам волн n , настолько разнесены друг от друга, что *связанностью* соответствующих им форм можно пренебречь. Однако многие реальные оболочки имеют близкие собственные частоты. В *шестом разделе пятой главы* на частном примере показано, что *механизмом*, запускающим взаимодействие *несопряженных* изгибных форм, может являться не только геометрическая *нелинейность* оболочки, но и неизбежная *начальная погибь*.

В *седьмом разделе* изучается влияние формулировки *тангенциальных* граничных условий на изгибные колебания *свободно* опертой оболочки, имеющей начальные неправильности вида (22). Рассматриваются четыре варианта граничных условий $N_1 = T = 0$; $N_1 = v = 0$; $u = T = 0$; $u = v = 0$, которые удовлетворяются *точно*. Прогиб аппроксимируется выражением (25), при этом форма радиальных колебаний представлена одним слагаемым ($a_4(t) = 0$). Определены три собственные частоты, зависящие от типа тангенциальных закреплений торцов оболочки. Первым двум частотам соответствуют преимущественно изгибные, а третьей – преимущественно радиальные колебания оболочки. На рис. 6 представлена зависимость квадрата *нижней* собственной частоты оболочки с параметрами $l/R = 0,6$; $R/h = 200$ от амплитуды

ды начальных несовершенств a_{10} ($a_{20} = 0$). Расчеты выполнены при $\mu = 0,3$ и числе окружных волн $n = 10$.

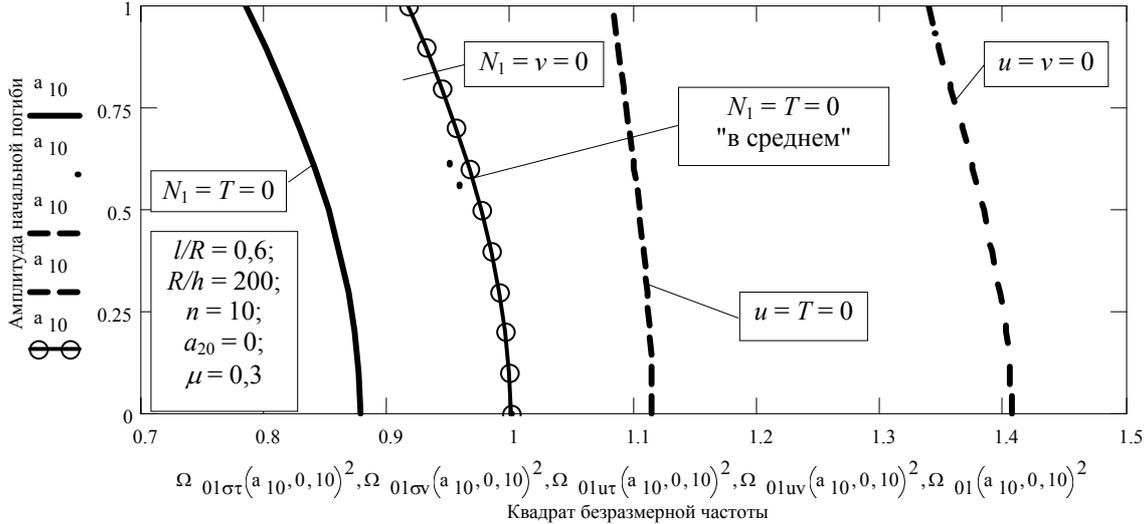


Рис. 6. Влияние формулировки тангенциальных граничных условий

Видно, что при всех вариантах тангенциальных граничных условий начальные неправильности *уменьшают* основную частоту. Удовлетворение тангенциальным граничным условиям "в среднем" приводит к заметной погрешности при определении собственных частот. При свободном сближении торцов оболочки ($u \neq 0$) оно приводит к их завышению, а при отсутствии сближения ($u = 0$) точные значения собственных частот занижаются. Расчеты показывают, что расстройка изгибного частотного спектра зависит как от амплитуды начальных несовершенств, так и от типа тангенциальных граничных условий. При ограничении смещения торцов оболочки она увеличивается.

Заметное влияние начальные неправильности оказывают и на частоты преимущественно радиальных колебаний, всегда увеличивая их, по сравнению со случаем идеальной оболочки.

В *восьмом разделе* изучается влияние всестороннего внешнего статического давления и начальных неправильностей вида (22) на динамические характеристики оболочки. В ряде работ отмечается, что собственные частоты несовершенной оболочки при относительно небольших уровнях нагрузки могут несколько *увеличиваться* по сравнению со случаем идеальной *ненагруженной* оболочки. Достоверность этого вывода в разделе ставится под сомнение.

Положение статического равновесия определено в рамках *нелинейной* теории пологих оболочек при удовлетворении тангенциальным граничным условиям $N_{1s} = T_s = 0$ "в среднем". Далее рассматриваются собственные колебания *нагруженной* оболочки около устойчивого "в малом" положения равновесия. Динамический прогиб аппроксимируется выражением (25) при $a_4(t) = 0$. Найдены три собственные частоты. Первым двум частотам $\Omega_{01} < \Omega_{02}$ соответствуют преимущественно изгибные, третьей – преимущественно радиальные колебания. Построены графики, иллюстрирующие зависимость низшей частоты Ω_{01} от статической нагрузки и амплитуды начальных несовершенств. Установлено, что *уменьшение* основной частоты Ω_{01} , по сравнению со случаем идеальной оболочки, имеет место даже при *малом* уровне статической нагрузки. С ростом нагрузки понижающее влияние $w_0(x, y)$ на частоту

основного тона резко усиливается, при этом может измениться число волн n , соответствующее низшей частоте. Расстройка изгибного частотного спектра с ростом статической нагрузки увеличивается.

При $\Omega_{01} = 0$ получено значение "верхней" критической нагрузки.

В *девятом разделе* исследуется влияние начальных неправильностей на собственные колебания оболочки, оба торца которой *жестко заземлены*. Сначала решение задачи получено при использовании *традиционной* линейной конечномерной модели несовершенной оболочки:

$$w(x, y, t) = h[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y] \sin^2 \alpha x. \quad (26)$$

Считается, что форма начальных несовершенств находится в "резонансе" с формой изгибных колебаний оболочки. Тангенциальные граничные условия удовлетворены "в среднем". Найдены две собственные частоты $1 < \Omega_{01kc} < \Omega_{02kc}$ (индекс "с" означает, что оболочка по концам жестко заземлена). Установлено, что основная частота *увеличивается* по сравнению со случаем идеальной оболочки, причем еще в большей степени, чем для случая свободного опирания торцов. К аналогичным выводам приходят и другие авторы.

Далее производится *уточнение* конечномерной модели оболочки, предполагающее взаимодействие изгибных и радиальных колебаний. Найдены три собственные частоты $\Omega_{01c} < 1 < \Omega_{02c} \ll \Omega_{03c}$. В *новом* решении основная частота несовершенной оболочки *меньше* основной частоты идеальной оболочки, а $\Omega_{02c} = \Omega_{01kc}$. Расстройка изгибного частотного спектра *незначительна*. Показано, что частота преимущественно радиальных колебаний увеличиваются по сравнению со случаем идеальной оболочки.

В *шестой главе* изучается влияние *осесимметричной* начальной погиби

$$w_0(x) = ha_{30} \sin \alpha_0 x; \quad \alpha_0 = m_0 \pi / l \quad (27)$$

на *линейные* динамические характеристики оболочки.

В *первом разделе* рассматривается вопрос о формах собственных колебаний *свободно* опертой оболочки, имеющей начальную погибь вида (27).

Показано, что такая погибь *не приводит* к взаимодействию изгибных колебаний оболочки с радиальными и *не расщепляет* частотный спектр.

Существует два класса независимых решений удовлетворяющих и уравнениям движения оболочки, и рассматриваемым граничным условиям:

$$w^{(1)}(x, y, t) = \sin \beta_n y \sum_m ha_{1m,n}(t) \sin \alpha_m x; \quad w^{(2)}(x, y, t) = \cos \beta_n y \sum_m ha_{2m,n}(t) \sin \alpha_m x. \quad (28)$$

Далее оценивается влияние осесимметричной погиби ($m_0 = 1$) на изгибные колебания *основного* тона. Прогиб оболочки представляется выражением

$$w(x, y, t) = h(a_{11,n} \sin \alpha_1 x + a_{12,n} \sin \alpha_2 x + a_{13,n} \sin \alpha_3 x) \sin \beta_n y, \quad (29)$$

то есть в первом разложении (28) удерживаются три члена ряда.

Тангенциальные граничные условия удовлетворены "в среднем". Найдены три собственные частоты: $\omega_{01} < \omega_{02} < \omega_{03}$. Показано, что погибь, направленная к оси оболочки, приводит к существенному *снижению* основной частоты. Взаимодействие форм собственных колебаний, характеризуемых разным числом полуволн m , оказывается *незначительным*, поэтому *низшие* собственные частоты могут быть вычислены при удержании в (28) только *одного* члена ряда:

$$w(x, y, t) = ha \sin \beta y \sin \alpha x; \quad \beta = n/R; \quad \alpha = \pi/l. \quad (30)$$

Во *втором разделе* рассматриваются *собственные* изгибные колебания *ненагруженной* оболочки, *свободно* опертой по торцам. Прогиб оболочки аппроксимируется выражением (30). Рассмотрены четыре варианта тангенциальных граничных условий $N_1 = T = 0$; $N_1 = v = 0$; $u = T = 0$; $u = v = 0$, которые удовлетворены *точно*. Приведены графики, иллюстрирующие влияние типа тангенциального закрепления торцов оболочки, ее относительной длины и толщины, а также амплитуды начальной погиби на частоту собственных изгибных колебаний. Зависимость частоты от амплитуды погиби a_{30} носит нелинейный характер. С ее ростом (при $a_{30} > 0$) частота сначала убывает, затем проходит через минимум и начинает возрастать. При отсутствии сближения торцов оболочки различным формам волнообразования n соответствует практически одно и то же значение амплитуды погиби, при котором данная частота минимальна: $a_{30} \approx 0,7 \div 0,8$. При свободном сближении торцов картина иная: с увеличением числа волн n значение амплитуды погиби, оказывающей наибольшее понижающее влияние на частоту, заметно уменьшается. С ростом относительной длины оболочки влияние погиби на частоту становится все менее заметным. Оболочка наиболее чувствительна к начальной погиби при свободном сближении торцов ($u \neq 0$). Погибь, направленная от оси оболочки, всегда *увеличивает* частоты собственных *изгибных* колебаний. Показано, что удовлетворение тангенциальным граничным условиям "в среднем" приводит к заметной погрешности в собственных частотах. Число волн n , соответствующее основной частоте, зависит от способа тангенциального закрепления торцов оболочки.

При свободном сближении торцов оболочки начальная погибь не оказывает влияния на частоты собственных *радиальных* колебаний. При $u = 0$ погибь, направленная от оси оболочки, эти частоты увеличивает, а при $a_{30} > 0$ до некоторого значения a_{30} имеет место снижение частот, а затем начинается их возрастание.

Результаты теоретического анализа в первых двух разделах подтверждены численными расчетами, выполненными МКЭ в пакете MSC/NASTRAN.

В *третьем разделе* исследуются *собственные* колебания оболочки с начальной погибью (27), *нагруженной* всесторонним внешним статическим давлением. Рассмотрены тангенциальные граничные условия: $N_1 = T = 0$; $N_1 = v = 0$, которые удовлетворяются *точно*. Показано, что влияние $w_0(x)$ на частоты собственных изгибных колебаний заметно усиливается при приближении значения нагрузки к критическому, вычисленному с учетом начальной погиби. Каждому сочетанию параметров, характеризующих геометрию оболочки, форму волнообразования и нагрузку, соответствует свое значение амплитуды погиби, оказывающей наибольшее понижающее влияние на частоты собственных колебаний. С ростом длины оболочки это значение амплитуды погиби возрастает. Нагрузка изменяет число волн n , соответствующее низшей частоте. Анализ графиков, иллюстрирующих влияние тангенциальных граничных условий и амплитуды начальной погиби на колебания *нагруженных* оболочек, показывает, что, как и для ненагруженных оболочек, удовлетворение этим условиям "в среднем" приводит к *существенной* погрешности при вычислении собственных частот.

Произведена оценка влияния $w_0(x)$ и моментности докритического состояния оболочки на величину *критической* нагрузки.

В четвертом разделе изучается влияние начальной погиби

$$w_0(x) = ha_{30} \sin^2 \alpha x; \quad \alpha = \pi/l \quad (31)$$

на изгибные колебания оболочки, торцы которой жестко защемлены.

Прогиб в первом приближении представлен в виде

$$w(x, y, t) = h[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y + a_3(t)] \sin^2 \alpha x. \quad (32)$$

Установлено, что влияние начальной осесимметричной погиби на частоты и формы собственных колебаний оболочки с жестко защемленными торцами, в целом, такое же, как и для случая свободно опертой оболочки.

В седьмой главе рассматриваются свободные нелинейные колебания шарнирно опертой оболочки. Изучается влияние осесимметричных и асимметричных начальных несовершенств, статической нагрузки и формулировки тангенциальных граничных условий на динамические характеристики оболочки.

В первом разделе рассматривается идеальная оболочка. Как уже отмечалось выше, традиционный подход к построению нелинейной конечномерной модели оболочки предполагает взаимодействие сопряженных изгибных форм, а также некоторые геометрические модельные представления о ее деформировании при конечных прогибах. При таком подходе прогиб оболочки, совершающей колебания вблизи зоны главного резонанса, представляется в виде:

$$w(x, y, t) = h\{[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y] \sin \alpha x + \Psi(x, y, t)\}, \quad \alpha = \pi/l, \quad \beta = n/R. \quad (33)$$

Установлено, что характер нелинейного поведения оболочки существенно зависит от выбора функции $\Psi(x, y, t)$. На основании последних работ ее рекомендуется принимать в виде $\Psi(x, y, t) = \Psi(x, t) = a_3(t) \sin^2 \alpha x$, где координата $a_3(t)$ представляет собой либо независимую координату, либо координату, определяемую из условия нерастяжимости контура поперечного сечения срединной поверхности оболочки. Это приводит в теоретическом анализе к мягкой скелетной кривой, качественно согласующейся с известными опытными данными. Такой подход способствовал объяснению ряда специфических явлений, проявляющихся при колебаниях оболочки с большими амплитудами. Однако рекомендуемое выражение для $\Psi(x, t)$ не удовлетворяет условию свободного опирания торцов оболочки по изгибающему моменту. Поэтому традиционный подход может быть использован в нелинейном анализе, но только для относительно длинных оболочек.

Предлагается иной подход к построению нелинейной конечномерной модели идеальной оболочки. Считается, что возбуждение изгибных колебаний оболочки с большими амплитудами приводит к возникновению радиальных колебаний. При таком подходе функция $\Psi(x, y, t) = \Psi(x, t)$ может быть получена "суммированием" форм малых радиальных колебаний идеальной оболочки.

Далее приводится традиционное решение. Прогиб оболочки имеет вид

$$w(x, y, t) = h\{[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y] \sin \alpha x + a_3(t) \sin^2 \alpha x\}. \quad (34)$$

Граничные условия $N_1 = T = 0$ удовлетворены "в среднем". Система динамических уравнений получена уточненным "статическим" приемом.

Скелетные кривые, отвечающие колебаниям оболочки по одной из изгибных форм $\sin \beta y \sin \alpha x$ ($a_1(\tau) = A_1 \cos \Omega_k \tau$; $a_2(\tau) = 0$) или $\cos \beta y \sin \alpha x$ ($a_1(\tau) = 0$; $a_2(\tau) = A_2 \cos \Omega_k \tau$), описываются одним и тем же уравнением мягкого типа:

$$\Omega_k^2(A_i) = (\tilde{\omega}_k/\omega)^2 = (1 + 3e_1 A_i^2/4)/(1 + e_2 A_i^2/2). \quad (35)$$

При двухмодовом режиме движения оболочки, когда координаты изменяются по закону $a_1(\tau) = A_1 \cos \Omega_{ck} \tau$; $a_2(\tau) = A_2 \sin \Omega_{ck} \tau$; $\Omega_{ck} = \tilde{\omega}_{ck} / \omega_k$, колебания представляют собой *бегущую* в окружном направлении изгибную волну с постоянными амплитудой ($A_1 = A_2$) и фазовой скоростью. При этом квадрат нелинейной частоты связан с амплитудой зависимостью

$$\Omega_{ck}^2(A_1) = 1 + e_1 A_1^2. \quad (36)$$

Необходимо отметить, что при использовании "статического" приема *без его уточнения* коэффициент e_2 в (35) оказывается равным нулю. В этом случае можно прийти к *неверному* выводу о том, что скелетная кривая двухмодового режима движения оказывается *более мягкой*, чем одномодового.

Затем эта же задача решается на основе *нового* подхода. Прогиб аппроксимируется выражением (25). Получена система *четырёх* связанных динамических уравнений. Показано, что колебания оболочки происходят около положения равновесия, *смещённого* по направлению к ее оси. Приведенные скелетные кривые относятся к *мягкому* типу. Скелетная кривая, отвечающая *традиционному* решению, проходит *выше* скелетной кривой *нового* решения. Это объясняется тем, что традиционный подход приводит к *завышению жесткости* оболочки. С уменьшением длины оболочки расхождение результатов, полученных на основе традиционного и нового подходов, увеличивается. Предельный переход к кольцу подтвердил адекватность конечномерной модели (25).

Далее система *четырёх* модальных уравнений упрощена *уточненным* "статическим" приемом и сведена к системе двух уравнений. Ее решение практически совпало с решением исходных четырех уравнений.

В заключение *первого раздела*, по-видимому, впервые дано объяснение причины, по которой функция $\Psi(x, t) = a_3(t) \sin \alpha x$, отвечающая всем граничным условиям свободного опирания торцов оболочки, но не рекомендуемая традиционным подходом, приводит для относительно *длинных* оболочек к *жесткой* скелетной кривой, качественно не согласующейся с опытными данными.

Во *втором разделе седьмой главы* рассматривается оболочка с *осесимметричной* начальной погибью (27), нагруженная всесторонним внешним статическим давлением. Динамический прогиб представлен выражением (25) (при $a_4(t) = 0$). Тангенциальные граничные условия удовлетворены "в среднем". В полученных модальных уравнениях связь обобщенных координат обусловлена нелинейностью оболочки и наличием начальной погиби. Показано, что движение нагруженной оболочки может происходить по одной из изгибных форм или представлять собой бегущую в окружном направлении изгибную волну. Построены графики, иллюстрирующие влияние амплитуды начальной погиби, нагрузки и числа волн n на скелетные кривые одно- и двухмодового режимов движения оболочки. Установлено, что погибь, направленная к оси нагруженной оболочки, оказывают сильное влияние на характер скелетных кривых. Они заметно смещаются в зону низших частот, выпрямляются и из *мягких* могут превратиться в *жесткие*. С ростом амплитуды колебаний изменяется число волн n , отвечающее низшей частоте. При уменьшении амплитуды колебаний обе нелинейные частоты сливаются в одну, поскольку $w_0(x)$ *не расщепляет* изгибный частотный спектр.

В *третьем разделе* изучается влияние статической нагрузки и *асимметричной*

ных начальных неправильностей вида (22). Получены уравнения скелетных кривых, отвечающих изгибным формам $\sin \beta y \sin \alpha x$ и $\cos \beta y \sin \alpha x$ (они *отличаются* друг от друга, так как $\Omega_{01} \neq \Omega_{02}$), а также двухмодовому режиму движения оболочки. Построены графики, иллюстрирующие влияние нагрузки и начальных неправильностей на одно- и двухмодовый режимы движения оболочки. Их анализ показывает, что статическая нагрузка (совместно с $w_0(x, y)$) увеличивает расстройку нелинейных частот и может изменить число волн n , отвечающее их минимальным значениям. С ростом амплитуды колебаний это влияние ослабевает. Если для идеальной оболочки амплитуды сопряженных изгибных форм при двухмодовом режиме движения равны между собой, и бегущая волна имеет постоянную амплитуду, то для несовершенной оболочки амплитуда сопряженной формы всегда больше амплитуды непосредственно возбуждаемой формы.

В *четвертом разделе*, по-видимому, впервые изучено влияние формулировки тангенциальных граничных условий, удовлетворяемых *точно*, на нелинейные динамические характеристики *идеальной* оболочки. Прогиб оболочки аппроксимирован выражением (25) ($a_4(t) = 0$). Скелетные кривые, соответствующие колебаниям по одной из изгибных форм $\sin \beta y \sin \alpha x$ или $\cos \beta y \sin \alpha x$, описываются одним и тем же уравнением *мягкого* типа, по виду аналогичным (35). Двухмодовый режим движения оболочки представляет собой бегущую в окружном направлении волну с постоянными амплитудой и фазовой скоростью. Графики скелетных кривых построены для четырех вариантов краевых условий $N_1 = T = 0$; $N_1 = v = 0$; $u = T = 0$; $u = v = 0$. Показано, что удовлетворение этим условиям "в среднем" приводит к заметной погрешности при определении динамических характеристик оболочки конечной длины. Для случая свободного сближения торцов оболочки ($u \neq 0$) частоты одно- и двухмодового режимов движения оболочки завышаются, а при неподвижных торцах ($u = 0$) – в еще большей степени занижаются.

В *восьмой главе* изучаются *вынужденные нелинейные* колебания *свободно* опертой по торцам оболочки. Считается, что вынуждающая нагрузка неравномерно распределена по ее поверхности: $q(x, y, t) = q \sin \beta y \sin \alpha x \cos \Theta t$.

В *первом разделе* рассматривается *идеальная* оболочка. Осесимметричная часть прогиба представляется в *двух* видах, соответствующих традиционному и новому решениям. Тангенциальные граничные условия удовлетворены "в среднем". Ортогонализация уравнения движения и уточненный "статический" прием приводят к системе двух модальных уравнений. Их периодическое решение при $\Omega \approx 1$ найдено методом Крылова – Боголюбова. Получены дифференциальные уравнения относительно неизвестных амплитуд и фаз колебаний, на основе которых изучаются возможные режимы движения оболочки.

Одному из режимов движения соответствуют колебания по изгибной форме, непосредственно возбуждаемой вынуждающей нагрузкой. Анализ устойчивости одномодового режима движения оболочки, как и для случая идеального *кольца*, привел к *двум* областям неустойчивости. Левая область является традиционной для систем с одной степенью свободы и *мягкой* характеристикой. Нелинейное *взаимодействие* сопряженных изгибных форм обуславливает появление дополнительной, правой области, в которой симметричная реакция идеальной оболочки также *неустой-*

чива. Общей границей для обеих областей неустойчивости является скелетная кривая симметричной реакции.

В том диапазоне частот вынуждающей нагрузки, где симметричная реакция неустойчива, система уравнений относительно амплитуд и фаз колебаний имеет и решение, которое характеризуется более сложным, чем стоячая волна, движением. Установлены разность фаз, связь между амплитудами сопряженных изгибных форм, а также зависимость между квадратом частоты двухмодового режима движения оболочки и амплитудой непосредственно возбуждаемой изгибной формы. Прогиб оболочки при несимметричной реакции представляет собой бегущую волну. Найдены границы области устойчивости двухмодового режима движения оболочки. Установлен диапазон частот нагрузки, в котором оба режима движения *идеальной* оболочки оказываются неустойчивыми.

Во *втором разделе* изучается влияние *осесимметричной* погиби (27). Показано, что связь между сопряженными изгибными формами обусловлена нелинейностью оболочки и начальной погибью. Периодические решения, соответствующие главному резонансу, найдены методом Крылова – Боголюбова. Определены области устойчивости одно- и двухмодового режимов движения оболочки. Установлен диапазон частот внешней нагрузки, в котором *обе* реакции неустойчивы. Осесимметричная погибь, снижающая собственную частоту, смещает нижнюю часть амплитудно-частотных кривых в зону меньших частот. С ростом амплитуды колебаний влияние $w_0(x)$ ослабевает. Погибь несколько *уменьшает* ширину области неустойчивости одномодового режима движения оболочки и, соответственно, *уменьшает* диапазон частот вынуждающей нагрузки, в котором несимметричная реакция является *устойчивой*. Сделан вывод о том, что осесимметричная начальная погибь, не приводящая к расщеплению изгибного частотного спектра, не вносит каких-либо *качественных* изменений при прохождении зоны главного резонанса по сравнению со случаем *идеальной* оболочки.

В *третьем разделе* изучаются вынужденные колебания оболочки с *асимметричными* начальными неправильностями (22). Анализ динамических уравнений показывает, что взаимодействие изгибных и радиальных колебаний обусловлено не только нелинейностью оболочки, но и наличием начальных несовершенств. Периодические решения в зоне главного резонанса найдены методом Крылова – Боголюбова. Определены области устойчивости одно- и двухмодового режимов движения. Как и для кольца, начальные неправильности, соответствующие характеру волнообразования оболочки, приводят к разрыву левой классической и правой дополнительной (порожденной взаимосвязью сопряженных изгибных форм) областей неустойчивости симметричной реакции.

Рис. 7 иллюстрирует одно- (жирные штриховые линии) и двухмодовый (тонкие сплошные линии и пунктирные линии с кружочками) режимы движения оболочки с параметрами $l/R = 0,6$; $R/h = 200$; $a_{10} = 1$ при $q = 0,03$.

Видно, что начальные неправильности смещают нижнюю часть амплитудно-частотных кривых обоих режимов движения оболочки в зону меньших частот. С ростом амплитуды колебаний влияние несовершенств ослабевает.

Поведение оболочки с *асимметричными* начальными неправильностями (рис. 8) *качественно* отличается от поведения идеальной оболочки или оболочки, имеющей начальную *осесимметричную* погибь. Из-за расщепления частотного спектра,

может отсутствовать диапазон частот вынуждающей нагрузки, в котором оба режима движения неустойчивы. Однако всегда имеется некоторый диапазон частот, в котором режимы стоячей и бегущей волны реализуются *одновременно*.

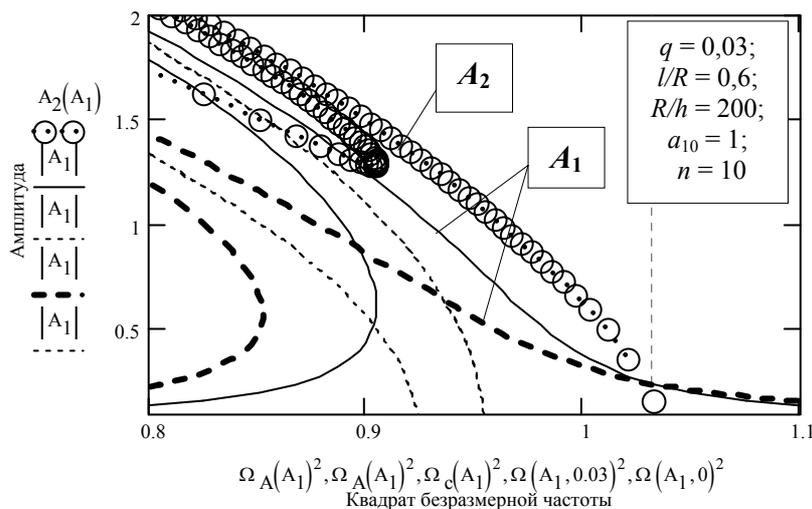


Рис. 7. Симметричная и несимметричная реакции несовершенной оболочки

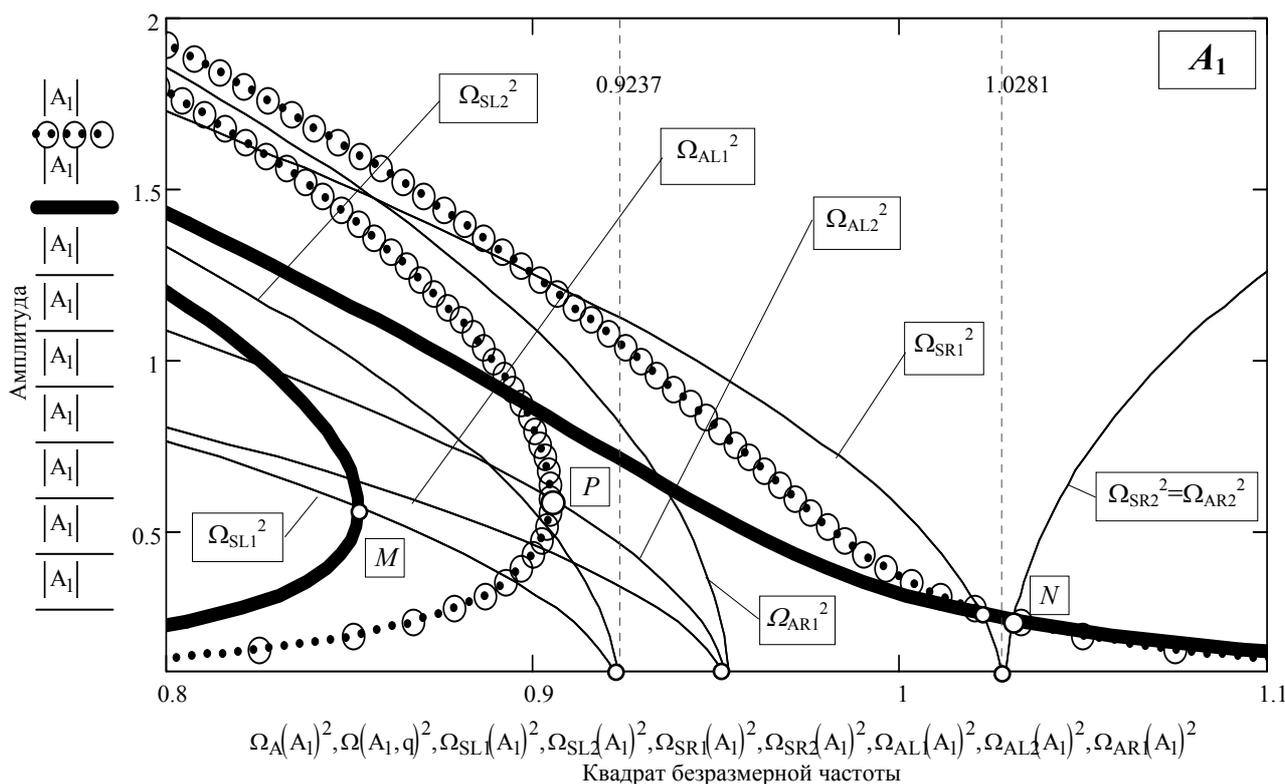


Рис. 8. Симметричная и несимметричная реакции несовершенной оболочки (амплитуда A_1)

Жирные сплошные линии на рисунке отвечают симметричной реакции, пунктирные линии с кружочками – несимметричной. Тонкими сплошными линиями показаны границы устойчивых режимов движения. Маркеры установлены на квадратах собственных частот *малых* изгибных колебаний.

Прохождение зоны главного резонанса происходит следующим образом. Сначала имеет место симметричная реакция. При $\Omega = \Omega_{SL1}$ в точке M происходит скачок с нижней ветви на верхнюю, после чего амплитуда A_1 постепенно уменьшается. На-

чина с $\Omega = \Omega_{AL1}$, помимо режима стоячей волны реализуется и двухмодовый режим движения оболочки ($A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$). При $\Omega = \Omega_{AL2}$ в точке P амплитуда несимметричной реакции резко увеличивается, а затем постепенно уменьшается. В диапазоне частот $\Omega_{SR1} < \Omega < \Omega_{SR2}$ имеет место только несимметричная, а при $\Omega > \Omega_{AR2}$ – наоборот, только симметричная реакция.

В *пятом разделе восьмой главы* приводятся некоторые известные экспериментальные данные. Продемонстрировано как качественное, так и количественное согласование, этих данных с результатами настоящей диссертационной работы.

В *заключительной части* работы сформулированы основные выводы.

1. Повторный анализ работ, посвященных изучению влияния начальных не-правильностей на изгибные колебания оболочек, позволил автору обнаружить в них и устранить несущественные неточности. Однако анализ оставил в силе ряд *фундаментальных* вопросов по изучаемой проблеме, главные из которых были связаны:

- с *расхождением* результатов теоретического анализа, приводящего к *существенному* расщеплению изгибного частотного спектра, с известными опытными данными, свидетельствующими о *незначительном* его расщеплении;
- с очевидным *несоответствием* здравому смыслу результатов теоретического анализа о влиянии начальных отклонений от идеальной круговой формы на частоты *собственных* изгибных колебаний оболочки;
- с *увеличением* собственных частот *несовершенной* оболочки при относительно небольших уровнях всестороннего внешнего статического давления по сравнению со случаем идеальной *ненагруженной* оболочки;
- с непреодолимыми *проблемами*, связанными с удовлетворением граничным условиям при исследовании изгибных колебаний *свободно* опертой оболочки *конечной* длины с *большими* амплитудами.
- с возможностью *устранения* эффекта расщепления изгибного частотного спектра за счет соответствующего прикрепления к оболочке малой массы.

Для решения этих, а также ряда других вопросов в работе предложено *уточнение* традиционной математической модели, в частности, в ее ключевой части, связанной с построением *конечномерной модели* оболочки.

2. Предложен *новый подход* к построению конечномерной модели оболочки. Считается, что возбуждение *изгибных* колебаний оболочки по одной из собственных форм приводит к возникновению *радиальных* колебаний, которые, в свою очередь, генерируют сопряженную изгибную форму. В *линейной* постановке механизмом, "запускающим" такое взаимодействие, являются начальные отклонения от идеальной круговой формы, неизбежные у реальной оболочки, а в *нелинейной* постановке – начальные неправильности и/или геометрическая нелинейность оболочки. Конечномерная модель оболочки, построенная на основе нового подхода, реально отображает физические процессы, происходящие при ее колебаниях, а также отвечает, по мнению автора, известным требованиям наглядности и достаточной простоты.

3. Новый подход принципиально отличается от *традиционного* подхода, который в *линейной* постановке предполагает, что начальные неправильности *напрямую* приводят к взаимодействию *сопряженных* изгибных форм, а в *нелинейной* постановке основывается и на некоторых *геометрических* модельных представлениях о деформировании оболочки при *больших* прогибах.

4. На основе предложенной конечномерной модели оболочки получены *новые динамические уравнения*, анализ которых позволил автору привести в соответствие результаты теории и опыта, а также получить ответ на все другие невыясненные фундаментальные вопросы, упомянутые выше.

5. Установлено, что начальные неправильности оказывают существенное влияние на частоты и формы *собственных* изгибных колебаний, на амплитудно-частотные кривые и области устойчивости возможных режимов движения оболочки при ее колебаниях с *большими* амплитудами. Начальные отклонения, совпадающие по форме с характером волнообразования оболочки, приводят к *незначительному* расщеплению изгибного частотного спектра. При этом основная частота всегда *уменьшается*, а не увеличивается по сравнению со случаем идеальной оболочки, как это принято считать в настоящее время.

6. Новая конечномерная модель позволяет удовлетворить *точно* всем граничным условиям задачи (в том числе и тангенциальным), и поэтому она адекватна оболочке *любой* длины. Показано, что удовлетворение тангенциальным граничным условиям "*в среднем*" может привести к заметной погрешности при определении динамических характеристик оболочки *конечной* длины.

7. Сопоставление теоретических результатов с результатами численного анализа, с надежными опытными данными, а также с результатами известных теоретических исследований, выполненных другими авторами, позволяет говорить о том, что *уточненная* математическая модель приводит к правильному качественному и количественному описанию динамических характеристик оболочек *конечной* длины с начальными неправильностями, что, в свою очередь, свидетельствует о приемлемости выполненного исследования в целом.

8. Методика оценки влияния начальных неправильностей на динамическое поведение оболочки, а также полученные в работе расчетные формулы и графики в *первом* приближении могут быть использованы при выполнении проекторочных динамических расчетов реальных оболочек, применяемых в ракетостроении, подводном судостроении и других отраслях техники.

9. Предложенный подход к построению конечномерной модели оболочки может быть использован и при изучении широкого круга проблем, близких к проблемам, затрагиваемым в диссертации и имеющим большое практическое значение. К ним, например, можно отнести статическую и динамическую устойчивость, параметрические колебания, панельный флаттер и др.

10. С технической точки зрения очень важно знать фактические начальные несовершенства реальной оболочки для возможности предсказания ее статического и динамического поведения. Прямой подход, который используется в настоящее время для контроля формы реальных оболочек, сложен и требует относительно длительных измерений. В известной работе А. Розена и И. Зингера предложен косвенный подход, позволяющий дать предварительную оценку величины начальных неправильностей. Для этого, по мнению ее авторов, необходимо возбудить изгибные колебания оболочки и по отклонению основных частот несовершенной и идеальной оболочек определить амплитуду несовершенств. Результаты настоящей работы, могут быть использованы для осуществления и дальнейшего развития косвенного подхода, а также для определения фактических условий закрепления торцов оболочки.

11. Предложенная методика решения ряда практических задач, связанных с поведением несовершенных оболочек, внедрена на ОАО "Амурский судостроительный завод" и в Институте машиноведения и металлургии ДВО РАН (лаборатория океанотехники). Результаты выполненных исследований внедрены и в учебный процесс. Они используются в курсовом и дипломном проектировании, а также при чтении курсов строительной механики машин и механики оболочечных конструкций студентам КНАГТУ.

12. В настоящее время малая технологическая погибь тонких круговых цилиндрических оболочек, образующаяся при постройке корпусов ракет, судов и других конструкций, не всегда учитывается при проведении динамических расчетов. Результаты выполненного исследования показывают, что во многих случаях нельзя пренебрегать влиянием начальных неправильностей, неизбежных у реальной оболочки, на ее динамические характеристики. В противном случае высокая напряженность реальных оболочек, заметно усиливающая влияние начальных неправильностей, может превратить нерезонансные по обычному расчету колебания в резонансные. Автор надеется, что на основе теоретических положений и результатов настоящей диссертационной работы будут предприняты новые исследования в области количественной оценки влияния начальных неправильностей, разнотолщинности стенки, малой присоединенной массы на динамические характеристики оболочек. По мере накопления уточненных теоретических и экспериментальных данных, расширения круга решаемых задач, возможного отказа от гипотезы Кирхгофа – Лява, разработки эффективных программ нелинейного анализа на ЭВМ (например, на базе МКЭ) можно будет использовать новые научные достижения для разработки практического способа учета динамической асимметрии при расчете реальных тонкостенных оболочечных конструкций с требуемой инженерной точностью.

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии:

1. Тарануха, Н. А. Динамика "неправильных" оболочек / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 423 с.
2. Тарануха, Н. А. Новые решения в динамике "неправильных" оболочек / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 203 с.

Публикации в журналах и изданиях, входящих в ПЕРЕЧЕНЬ ВАК:

1. Лейзерович, Г. С. О нелинейных формах движения тонких круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 161–164.
2. Тарануха, Н. А. О влиянии начальных неправильностей на собственные изгибные колебания тонких круговых цилиндрических оболочек / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович // Изв. вузов. Строительство. – 2001. – № 1. – С. 25–28.
3. Тарануха, Н. А. О влиянии начальных отклонений от идеальной круговой формы цилиндрических оболочек на собственные изгибные колебания / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42. – № 2. – С. 180–187.
4. Лейзерович, Г. С. Неочевидные особенности динамики круговых цилиндри-

ческих оболочек / Г.С. Лейзерович, Н.А. Тарануха // Изв. РАН МТТ. – 2008. – № 2. – С. 96–105.

5. Лейзерович, Г. С. О математической модели нелинейных колебаний круговых цилиндрических оболочек с начальными неправильностями / Г.С. Лейзерович, Н.А. Тарануха // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Нижний Новгород: ННГУ, 2009. – № 6 (1). – С. 137–141.

6. Тарануха, Н. А. О влиянии начальных неправильностей и малой присоединенной массы на расщепление изгибного частотного спектра тонких круговых цилиндрических оболочек / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович // Вестник Саратовского государственного технического университета. – Саратов: СГТУ, 2010. – № 1. – С. 18–23.

7. Тарануха, Н. А. Механика тонких круговых цилиндрических оболочек с начальными неправильностями / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович // Морские интеллектуальные технологии. – 2010. – № 2 (8). – С. 38–41.

8. Лейзерович, Г. С. Динамические характеристики тонких круговых цилиндрических оболочек с начальными неправильностями / Г.С. Лейзерович, Н.А. Тарануха // Морские интеллектуальные технологии. – 2010. – № 2 (8). – С. 42–44.

Другие публикации:

1. Калинин, В. С. Сравнение собственных частот вытянутой круговой цилиндрической оболочки, вычисленных по стержневой теории и по теории оболочек / В.С. Калинин, Г.С. Лейзерович, А.Ф. Шинкевич // Динамика суд. оболочек: Мат. по обмену опытом. – Л.: Судостроение, 1974. – Вып. 208. – С. 69–84.

2. Лейзерович, Г. С. Влияние начальных неправильностей на частоты свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович // Труды ЛКИ: Прочность судовых конструкций. – 1975. – Вып. 100. – С. 47–51.

3. Лейзерович, Г. С. Устойчивость и нелинейные колебания круговой цилиндрической панели с несближающимися продольными кромками и начальной погибью / Г.С. Лейзерович // Труды ЛКИ: Прочность судовых конструкций. – 1975. – Вып. 100. – С. 52–57.

4. Лейзерович, Г. С. Свободные нелинейные изгибные колебания тонкостенной круговой цилиндрической оболочки / Г.С. Лейзерович // Стр. механика корабля: Межвуз. сб. – Владивосток: ДВПИ, 1977. – Вып. 1. – С. 144–150.

5. Лейзерович, Г. С. Собственные колебания тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с начальной погибью / Г.С. Лейзерович // Проблемы прочности и надежн. констр. перспективных трансп. судов и плавучих соор.: Тез. докл. Всесоюз. научно-техн. конф. – Л.: Судостроение, 1979. – С. 87–88.

6. Лейзерович, Г. С. О нелинейных формах движения круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович // Статика и динамика пространственных конструкций: Тез. докл. V Всесоюз. конф. – Киев: КИСИ, 1985. – С. 118.

7. Лейзерович, Г. С. Влияние начальной погиби на напряженно-деформированное состояние криволинейной ортотропной трубы / Г.С. Лейзерович, В.Н. Тышкевич // Влияние техн. изг. на деформирование и разрушение констр. из композ. материалов: Межвуз. сб. – М.: МАТИ, 1989. – С. 89–93.

8. Лейзерович, Г. С. О влиянии начальной погиби на изгибные колебания круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович // Актуальные проблемы строи-

тельства и архитектуры в районах Дальнего Востока: Межвуз. сб. – Иркутск, Благовещенск: ИПИ, БТИ, 1990. – Ч. 1. – С. 90–94.

9. Лейзерович, Г. С. О расщеплении частотного спектра круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович // Проблемы прочн. и экспл. надежности судов: Труды межд. конф. – Владивосток: ДВГТУ, 1999. – С. 323–325.

10. Лейзерович, Г. С. Влияние начальной погиби на продольно-радиальные колебания тонких круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович // Вестник КнАГТУ: Вып. 2. Сб. 1. Ч. 2. Прогрессивные технологии в машиностроении. – Комсомольск-на-Амуре: КнАГТУ, 2000. – С. 133–137.

11. Тарануха, Н. А. Нелинейные свободные изгибные колебания тонких круговых цилиндрических оболочек / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович // Дальневосточный математический журнал. – 2000. – № 1. – С. 102–110.

12. Тарануха, Н. А. Об изгибных колебаниях тонких круговых цилиндрических оболочек переменной толщины с большими амплитудами / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович // ВЕМ&FEM. XIX Методы граничных и конечных элементов: Межд. конф. Мат. моделирование в мех. сплошных сред. – Санкт–Петербург. Труды. Том 1 (тезисы докладов), 2001. – С. 119–120.

13. Лейзерович, Г. С. О взаимодействии изгибных и радиальных колебаний тонких круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович, М.Н. Сиверс // Конф. по строительной механике корабля памяти проф. П.Ф. Папковича: Тез. докл. – Санкт–Петербург: ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2002. – С. 68.

14. Лейзерович, Г. С. О линейном взаимодействии форм колебаний тонких круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович // Фундаментальные и прикладные вопросы механики: Сб. докл. межд. научной конф. – Хабаровск: ХГТУ, 2003. – С. 771–775.

15. Лейзерович, Г. С. О взаимодействии форм колебаний круговых цилиндрических оболочек / Г.С. Лейзерович, М.Н. Сиверс // Кораблестроительное образование и наука – 2003: Материалы региональной НТК с международным участием. – Санкт–Петербург: СПбГМТУ, 2003. – С. 344–351.

16. Лейзерович, Г. С. О расщеплении изгибного частотного спектра тонких круговых цилиндрических оболочек с динамической асимметрией / Г.С. Лейзерович // Тр. XXI межд. конф. по теории оболочек и пластин. – Саратов: СГТУ, 2005. – С. 157–161.

17. Тарануха, Н. А. Математическая модель нелинейных колебаний коротких оболочек / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович // Тр. VIII Всероссийской научн. конф. "Нелинейные колебания механических систем". – Нижний Новгород: Изд. Дом "Диалог Культур", 2008. – Т. 2. – С. 445–450.

18. Лейзерович, Г. С. Математическая модель собственных колебаний круговых цилиндрических оболочек с начальными неправильностями / Г.С. Лейзерович // Тр. Седьмой межд. конф. "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов". – Ульяновск: УлГУ, 2009. – С. 154–155.