

СОБОЛЕВА Ольга Владимировна

**ОБРАТНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА**

01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Владивосток - 2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте прикладной математики Дальневосточного отделения РАН и Федеральном государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Дальневосточном государственном техническом рыбохозяйственном университете”

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Алексеев Геннадий Валентинович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Потапов Игорь Иванович

кандидат физико-математических наук
Луценко Николай Анатольевич

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения РАН

Защита состоится “25” ноября 2011 года в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета ДМ005.007.02 в Институте автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН по адресу: 690041, Владивосток, ул. Радио, 5, ауд. 510, E-mail: dm00500702@iacp.dvo.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН

Автореферат разослан “ ” октября 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,

кандидат физико-математических наук



О.В.Дудко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. В последние годы большое внимание уделяется изучению процесса антропогенного загрязнения морских и пресных водоемов. Применение метода математического моделирования для изучения указанного процесса приводит к необходимости построения и исследования математических моделей, которые описывают распространение загрязнений в изучаемой области. Указанные модели и используемые граничные условия содержат ряд параметров, которые должны быть заданы для однозначного нахождения решения краевых задач. Но в практических задачах часто возникают ситуации, когда некоторые из параметров не известны либо заданы приближенно и их требуется найти вместе с решением. Такие задачи относятся к классу обратных задач для моделей переноса вещества.

Особую трудность вызывает исследование коэффициентных обратных задач, поскольку по своим постановкам даже для линейных моделей они относятся к нелинейным и, как правило, некорректным задачам математической физики. Это обстоятельство существенно осложняет проблемы построения вычислительных алгоритмов для приближенного решения коэффициентных задач и затрудняет полное и строгое обоснование их сходимости. Теоретическому или численному анализу обратных задач для моделей распространения загрязнений посвящены работы О.М. Бабешко, А.А. Самарского, В.Т. Борухова, П.Н. Вабищевича, А.М. Денисова, Ю.Ю. Гончаренко, О.В. Евдокимовой, Ю.И. Ибрагимова, А.В.Кармазина, В.Н. Кармазина, В. Н. Коморина, В.Н. Лебединцева, Н.В. Музылева, О.В. Нагорнова, Е.С. Соколова, А.В. Чухлебовой, В.А. Шлычкова, J.R. Cannon, С. St. Clair, A.G. Fatullayev и других исследователей.

Наряду с обратными задачами важную роль в приложениях играют и задачи управления для моделей переноса загрязнений. Интерес к этим задачам появился в 70–80-е годы прошлого столетия, начиная с работ Г.И. Марчука, В.В. Пененко и других исследователей, посвященных решению задач оптимального размещения предприятий вблизи экологически значимых зон.

Важно отметить, что исследование обратных задач можно свести к исследованию соответствующих экстремальных задач путем введения функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче, и последующей его минимизации на решениях исходной задачи. Это позволяет рассматривать обратные задачи и задачи управления с единых позиций математической теории управления и применять для их решения один и тот же математический аппарат, основанный на теории экстремальных задач условной оптимизации. Данный подход для моделей гидродинамики и тепломассопереноса интенсивно развивается в работах А.В. Фурсикова, Г.В. Алексева, Д.А. Терешко, А.И. Короткого, М. Gunzburger, R. Stavre и ряда других отечественных и зарубежных исследователей.

Основная масса работ цитируемых выше авторов посвящена решению задач восстановления неизвестных коэффициентов или правых частей дифференциаль-

ных уравнений, входящих в рассматриваемые модели. В то же время почти нет работ по решению обратных задач нахождения коэффициентов граничных условий. Большая часть диссертации посвящена решению именно такого типа задач, на которые мы будем ссылаться как на граничные обратные экстремальные задачи.

Для численного решения рассматриваемых в диссертации обратных экстремальных задач можно предложить два метода. Первый метод основан на использовании систем оптимальности, описывающих необходимые условия экстремума. Указанная система оптимальности состоит из прямой задачи для главного состояния, сопряженной задачи для сопряженного состояния, которое определяется рассматриваемой экстремальной задачей, и вариационного уравнения для управлений. В силу специфики системы оптимальности для нахождения ее решения удобно применять метод Ньютона, который обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса. Именно этот метод используется в диссертации при численном решении рассматриваемых обратных задач. Ввиду этого большое внимание в первых двух главах диссертации уделяется выводу систем оптимальности для рассматриваемых обратных экстремальных задач и качественному анализу их свойств. Альтернативный способ основан на использовании для решения экстремальных задач методов, аналогичных прямым методам вариационного исчисления. Однако этот метод сложен в реализации и редко используются на практике.

Цель работы. Целью диссертации является теоретический и численный анализ коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарных линейной и нелинейной моделей переноса вещества, описывающих распространение загрязняющего вещества в ограниченной области.

Методы исследования. При теоретическом анализе рассматриваемых в диссертации обратных экстремальных задач использовались методы математического моделирования и математической физики, методы оптимизации, а также методы теории дифференциальных уравнений. Для численного решения использовались следующие методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод Ньютона, методы решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами, методы обработки больших объемов информации, а также методы визуализации результатов вычислительных экспериментов.

Научная новизна

1. Проведено теоретическое и численное исследование коэффициентных обратных экстремальных задач для линейного стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции, описывающего распространение загрязняющего вещества в ограниченной области. Установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование, единственность и устойчивость решений конкретных обратных экстремальных задач относительно малых возмущений заданного функционала качества и одной из функций, входящих в основное уравнение конвекции-диффузии-реакции.

2. Проведено теоретическое исследование обратных экстремальных задач для нелинейной модели массопереноса, описывающей перенос вещества в рамках классического приближения Обербека–Буссинеска. Установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование, единственность и устойчивость решений конкретных экстремальных задач относительно малых возмущений функционала качества и одной из заданных функций, входящих в рассматриваемую нелинейную модель.

3. Построены и проанализированы системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума для рассматриваемых экстремальных задач.

4. Разработаны численные алгоритмы решения конкретных экстремальных задач, основанные на методе Ньютона. Создан комплекс программных единиц, с помощью которого проводились численные эксперименты и анализ разработанных алгоритмов. Проведен сравнительный анализ результатов выполненных численных экспериментов. Установлены количественные зависимости точности восстановления неизвестных функций, входящих в краевую задачу для линейного уравнения конвекции-диффузии-реакции, от параметра регуляризации, начального приближения и других параметров.

Положения, выносимые на защиту

1. Постановка и теоретический анализ коэффициентных обратных экстремальных задач для линейного стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции, описывающего перенос вещества в ограниченной области.

2. Постановка и теоретический анализ коэффициентных обратных экстремальных задач для нелинейной стационарной модели переноса вещества.

3. Численные алгоритмы решения коэффициентных обратных экстремальных задач для линейного уравнения конвекции-диффузии-реакции, программы решения обратных экстремальных задач, результаты вычислительных экспериментов, сравнительный анализ решений, полученных в работе с помощью вычислительных экспериментов.

4. Количественные зависимости точности восстановления неизвестных функций, входящих в краевые условия для уравнения конвекции-диффузии-реакции, от параметра регуляризации, начального приближения и других параметров.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты работы носят теоретический характер и представляют интерес для специалистов в следующих областях: моделирование распространения загрязняющих веществ, коэффициентные обратные экстремальные задачи для дифференциальных уравнений. Полученные результаты могут быть использованы для исследования прямых и обратных задач конвекции-диффузии-реакции в более сложных случаях (например, в случае одновременного восстановления двух и более коэффициентов уравнения), а также для решения задач идентификации плотностей неизвестных источников в случае более сложной геометрии области и задания более сложных граничных условий.

Диссертационная работа поддержана следующими грантами.

- Проекты 04-01-00136-а, 10-01-00219-а, 06-01-96020-р-восток-а и 09-01-98518-р-восток-а, 06-И-П22-086 (2006-2008 гг.) и 09-И-П29-01 (2009-2011 гг.) Российского фонда фундаментальных исследований;

- Интеграционные и молодежные проекты ДВО РАН 06-И-СО-03-010 (2006-2008 гг.), 09-И-СУ-03-003 (2009-2011 гг.), 06-III-A-01-011, 06-III-A-03-072 (2006-2008 гг.), 09-III-A-03-070, 10-III-B-01M-003 (2009-2011 гг.);

- Гранты Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-9004.2006.1 (2006–2007 гг.) и НШ-2810.2008.1 (2008–2009 гг.);

- Проект “Избранные проблемы теоретической и прикладной математики” в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались ранее на различных, в том числе на международных, научных конференциях и семинарах: Дальневосточной школе-семинаре им. ак. Е.В. Золотова (Владивосток, 2002, 2003, 2004, 2006, 2007, 2008, 2010; Хабаровск, 2005, 2009); Дальневосточной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по математическому моделированию (Владивосток, 2003, 2004, 2007, 2009); Всероссийской конференции посвященной 70-ю со дня рожд. ак. В.П. Мясникова “Фундаментальные и прикладные вопросы механики” (Владивосток, 2006); 2-ой международной научной конференции “Проблемы экологии, безопасности жизнедеятельности и рационального природопользования Дальнего Востока и стран АТР”(Владивосток, 2006); Конференции молодых ученых Тихоокеанского океанологического института им. В.И. Ильичева ДВО РАН “Океанологические исследования” (Владивосток, 2008); Всероссийской конференции, приуроченной к 70-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 2009); Всероссийской научной конференции посвященной 75-ю со дня рожд. ак. Мясникова “Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления” (Владивосток, 2011); объединенном научном семинаре отдела механики деформируемого твердого тела ИАПУ ДВО РАН под руководством чл.-корр. РАН А.А. Буренина.

Достоверность результатов обеспечивается использованием современных апробированных методов теоретического и численного анализа рассматриваемой в диссертации обратных экстремальных задач.

Публикации и вклад автора. По результатам диссертации лично автором и в соавторстве опубликовано 19 научных работ, получено свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ. Список работ приведен в конце автореферата. Решение задач, сформулированных в диссертации, получено автором лично либо при его участии. Постановка задач, выбор методов исследования, а также анализ результатов осуществлялись совместно с научным руководителем. Исследование свойств разработанных алгоритмов, проведение вычислительных экспериментов, обработка полученных результатов проведены автором самостоя-

тельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 118 страницах машинописного текста, состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 142 наименований. Диссертация содержит 36 рисунков, включенных в текст.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении излагается предмет исследования диссертации, указаны актуальность темы, цели и задачи работы и кратко описывается ее содержание.

Первая глава посвящена теоретическому исследованию коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции, описывающего распространение загрязняющего вещества в ограниченной области Ω с липшицевой границей Γ , состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N . Исходная краевая задача описывается соотношениями

$$-\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\varphi - w_0\partial\varphi/\partial z + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial\varphi/\partial n + \alpha\varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (2)$$

Здесь φ – концентрация загрязняющего вещества (примеси), $\lambda = \text{const} > 0$ – коэффициент диффузии, \mathbf{u} – заданный вектор скорости, $w_0 = \text{const} \geq 0$ – величина вертикальной скорости осаждения частиц примеси, $k \geq 0$ – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, f – плотность объемных источников, ψ – количество вещества на границе Γ_D , χ – поток вещества через границу Γ_N , α – коэффициент массообмена на границе Γ_N .

При исследовании задачи (1), (2) в качестве основных функциональных пространств используются известные функциональные пространства $L^2(D)$ и $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, где D представляет собой либо область Ω либо ее подмножество Q , либо границу Γ , либо некоторую часть Γ_0 границы Γ . Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$ или в $L^2(\Gamma_0)$ обозначаются через (\cdot, \cdot) , $(\cdot, \cdot)_Q$ или $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_0}$, норма в $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$ или в $L^2(\Gamma_0)$ – через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_Q$ или $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$, норма либо полунорма в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega) \equiv H^1(\Omega)^d$ – через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$, норма в $H^{1/2}(\Gamma_D)$ – через $\|\cdot\|_{1/2, \Gamma_D}$.

Предполагается, что выполняются следующие условия:

(а) Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, а открытые участки Γ_D и Γ_N границы Γ удовлетворяют условиям: $\Gamma_D \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \neq \emptyset$, $\Gamma_N \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$;

(б) $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\text{div } \mathbf{u} = 0$ в Ω , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ на Γ_N , $\lambda_* = \delta_1\lambda - \gamma_4|w_0| > 0$.

Вводятся функциональные пространства $\mathcal{T} \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$, $L^2_+(\Gamma_N) = \{\alpha \in L^2(\Gamma_N) : \alpha \geq 0 \text{ на } \Gamma_N\}$, $L^2_+(\Omega) = \{k \in L^2(\Omega) : k \geq 0 \text{ в } \Omega\}$. Через \mathcal{T}^* обозначается двойственное к \mathcal{T} относительно пространства $L^2(\Omega)$. Вводятся билинейные формы $a, c_{\mathbf{u}} : H^1(\Omega)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ формулами

$$a(\varphi, h) = (\nabla\varphi, \nabla h) \equiv \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla h d\mathbf{x}, \quad c_{\mathbf{u}}(\varphi, h) = (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) \equiv \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi) h d\mathbf{x}.$$

В работе используются следующие неравенства:

$$|(\alpha\varphi, h)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_3 \|\alpha\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_1 \|h\|_1, \quad |(\chi, h)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|h\|_{\Gamma_N}, \quad \|h\|_Q \leq \gamma_4 \|h\|_1.$$

Здесь $Q \subset \Omega$, $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ – некоторые константы, зависящие от Ω .

Под слабым решением задачи (1), (2) понимается функция $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} & \lambda(\nabla\varphi, \nabla h) + \lambda(\alpha\varphi, h)_{\Gamma_N} - w_0(\partial\varphi/\partial z, h) + \\ & + (k\varphi, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N}, \quad \gamma|_{\Gamma_D}\varphi = \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Основным результатом разд. 1.1 является доказанная теорема о существовании и единственности слабого решения задачи (1), (2).

Разд. 1.2 посвящен постановке и исследованию многопараметрической обратной экстремальной задачи для модели (1), (2). Множество исходных данных задачи (1), (2) разбивается на две группы: группу фиксированных данных $u_0 = (\lambda, w_0, \mathbf{u})$ и группу управлений $u = (\alpha, \chi, f, \psi, k)$ и предполагается, что управление u изменяется на множестве $K \equiv K_1 \times K_2 \times K_3 \times K_4 \times K_5$, где

(с) $K_1 \subset L^2_+(\Gamma_N)$, $K_2 \subset L^2(\Gamma_N)$, $K_3 \subset L^2(\Omega)$, $K_4 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$, $K_5 \subset L^2_+(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Вводится функционал $J : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$, где $X = H^1(\Omega)$ формулой

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_3}{2} \|f\|^2 + \frac{\mu_4}{2} \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}^2 + \frac{\mu_5}{2} \|k\|^2. \quad (4)$$

Здесь $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ – функционал качества, $\mu_l \geq 0, l = 0, 1, \dots, 5$ – константы.

С точки зрения приложений практический интерес представляют собой следующие примеры функционала качества I :

$$I_1(\varphi) = |\varphi|_1^2, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi\|_1^2, \quad I_3(\varphi) = \|\varphi - \varphi_d\|_Q^2, \quad I_4(\varphi) = \int_Q \varphi dx.$$

Здесь $Q \subset \Omega$ – подобласть области Ω , $\varphi_d \in L^2(Q)$ – заданная функция.

Рассматривается следующая экстремальная задача:

$$J(\varphi, u) \equiv J(\varphi, \alpha, \chi, f, \psi, k) \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in X \times K. \quad (5)$$

Здесь $F(\varphi, u) = 0$ – операторное ограничение, отвечающее слабой формулировке (3) задачи (1), (2), Доказан ряд теорем о разрешимости как общей экстремальной задачи (5), так и ряда конкретных экстремальных задач.

В разд. 1.3 выводятся условия оптимальности для задачи (5). Доказана теорема о достаточных условиях на исходные данные, обеспечивающих существование множителя Лагранжа $y^* = (\eta, \zeta) \in \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$, для которого выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа, имеющее вид тождества относительно (η, ζ)

$$\lambda a(\tau, \eta) + \lambda(\hat{a}\tau, \eta)_{\Gamma_N} - w_0(\partial\tau/\partial z, \eta) + (\hat{k}\tau, \eta) +$$

$$+c_{\mathbf{u}}(\tau, \eta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -\langle J'_{\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{u}), \tau \rangle \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad (6)$$

и выполняется принцип минимума, эквивалентный следующему вариационному неравенству относительно управлений $(\hat{f}, \hat{\psi}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{k})$:

$$(f - \hat{f}, \eta) + \langle \zeta, \psi - \hat{\psi} \rangle_{\Gamma_D} + (\chi - \hat{\chi}, \eta)_{\Gamma_N} - \lambda((\alpha - \hat{\alpha})\hat{\varphi}, \eta)_{\Gamma_N} - ((k - \hat{k})\hat{\varphi}, \eta) \leq J(\hat{\varphi}, u) - J(\hat{\varphi}, \hat{u}) \quad \forall u = (\alpha, \chi, f, \psi, k) \in K. \quad (7)$$

Тождество (6), называемое сопряженной задачей, вместе с неравенством (7) и уравнением $F(\varphi, u) = 0$ описывает систему оптимальности для задачи (5). На основе ее анализа в разд. 1.4 устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений конкретных экстремальных задач.

В разд. 1.4.1 рассматривается случай, когда коэффициенты α и k заданы, а неизвестными являются функции f , ψ и χ вместе с решением φ задачи (1), (2). Устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность решения следующей экстремальной задачи:

$$J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2}I(\varphi) + \frac{\mu_2}{2}\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_3}{2}\|f\|^2 + \frac{\mu_4}{2}\|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}^2 \rightarrow \inf,$$

$$F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in X \times K, \quad u = (\chi, f, \psi), \quad K = K_2 \times K_3 \times K_4.$$

В разд. 1.4.2 изучается коэффициентная обратная экстремальная задача

$$J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2}\|\varphi - \varphi_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2}\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, \alpha) = 0, \quad (\varphi, \alpha) \in X \times K_1. \quad (8)$$

Доказан ряд теорем об единственности и устойчивости ее решения. В частности доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в дополнение к условиям (a), (b) $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$, $k \in L^2_+(\Omega)$ – заданные элементы, $\mu_0 > 0$, $K_1 \subset L^2_+(\Gamma_N)$ – выпуклое замкнутое множество и пусть $\|\varphi_i\|_1 \leq M_{\varphi}^0$, причем $\mu_1 \geq \mu_0 \gamma_3^2 \lambda^2 \lambda_*^{-2} M_{\varphi}^0 \gamma_4 (3\gamma_4 M_{\varphi}^0 + 2\|\varphi_d^{(i)}\|_Q) + \varepsilon$, $\varepsilon = \text{const} > 0$. Обозначим через $(\varphi_i, \alpha_i) \in H^1(\Omega) \times K_1$ решение задачи (8), отвечающее функции $\varphi_d^{(i)} \in L^2(Q)$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы оценки устойчивости

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Gamma_N} \leq (\mu_0/\varepsilon) \gamma_3 \lambda \lambda_*^{-1} M_{\varphi}^0 \gamma_4 \|\varphi_d^{(1)} - \varphi_d^{(2)}\|_Q,$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_1 \leq (\mu_0/\varepsilon) (\gamma_3 \lambda \lambda_*^{-1} M_{\varphi}^0)^2 \gamma_4 \|\varphi_d^{(1)} - \varphi_d^{(2)}\|_Q$$

относительно малых возмущений заданной функции φ_d в норме $L^2(Q)$.

В разд. 1.4.3 аналогичные теоремы доказаны для многопараметрической обратной экстремальной задачи

$$J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2}\|\varphi - \varphi_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2}\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_5}{2}\|k\|^2 \rightarrow \inf,$$

$$F(\varphi, u) = 0, \quad \varphi \in X, \quad u = (\alpha, \chi, k) \in K.$$

В разд. 1.4.4 исследуется двухпараметрическая экстремальная задача

$$J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2} \|\varphi - \varphi_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad (9)$$

$$F(\varphi, u, f) = 0, \quad \varphi \in X, \quad u = (\alpha, \chi) \in K_1 \times K_2$$

и доказана следующая основная теорема об устойчивости решения относительно малых возмущений как функционала качества, так и функции f .

Теорема 2. Пусть при выполнении условий (a), (b), (c) тройка $(\varphi_i, \alpha_i, \chi_i) \in H^1(\Omega) \times K_1 \times K_2$ является решением задачи (9), отвечающим заданным функциям $\varphi_d \equiv \varphi_d^{(i)} \in L^2(Q)$ и $f_i \in Z \subset L^2(\Omega)$ $i = 1, 2$, где $Q \subset \Omega$ – произвольное открытое подмножество. Предположим, что $\mu_0 > 0$, $\|\varphi_i\|_1 \leq M_\varphi^0$, $i = 1, 2$ и выполняются условия

$$\mu_1 \geq 2\mu_0\gamma_2^2\lambda_*^{-2}(M_\varphi^0)^{-1}\tilde{M}_\varphi^0 + 2\varepsilon\gamma_2^2, \quad \mu_2 \geq 2\mu_0\gamma_3^2\lambda^2\lambda_*^{-2}M_\varphi^0\tilde{M}_\varphi^0 + 2\varepsilon\gamma_3^2\lambda^2(M_\varphi^0)^2, \quad (10)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$. Тогда справедливы следующие оценки устойчивости:

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Gamma_N} \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4}{\gamma_3\lambda\lambda_*M_\varphi^0} \|\varphi_d^{(1)} - \varphi_d^{(2)}\|_Q + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4(2\gamma_4M_\varphi^0 + \|\varphi_d^{max}\|_Q)}{\gamma_3\lambda\lambda_*^2(M_\varphi^0)^2} \|f_1 - f_2\|,$$

$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4}{\gamma_2\lambda_*} \|\varphi_d^{(1)} - \varphi_d^{(2)}\|_Q + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4(2\gamma_4M_\varphi^0 + \|\varphi_d^{max}\|_Q)}{\gamma_2\lambda_*^2M_\varphi^0} \|f_1 - f_2\|,$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_1 \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4}{\lambda_*^2} \|\varphi_d^{(1)} - \varphi_d^{(2)}\|_Q + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4(2\gamma_4M_\varphi^0 + \|\varphi_d^{max}\|_Q)}{\lambda_*^3M_\varphi^0} \|f_1 - f_2\|.$$

Вторая глава посвящена исследованию экстремальной задачи для нелинейной модели переноса вещества, описываемой при использовании классического приближения Обербека–Буссинеска соотношениями

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} + \mathbf{b}\varphi, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}, \quad (11)$$

$$-\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \lambda\partial\varphi/\partial n|_{\Gamma_N} = \chi. \quad (12)$$

Здесь $p = P/\rho$, где P – давление, $\rho = \text{const}$ – плотность среды, $\nu > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, \mathbf{f} – объемная плотность внешних сил, $\mathbf{b} = \beta_\varphi \mathbf{G}$, где \mathbf{G} – вектор ускорения свободного падения, а β_φ – заданная функция, \mathbf{g} – функция, заданная на границе Γ , смысл участков Γ_D , Γ_N , а также величин \mathbf{u} , φ , $\lambda > 0$, f , ψ и χ указан выше.

Пусть $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{v} = 0\}$, $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p, 1) = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) = \{\mathbf{g} = \mathbf{v}|_\Gamma : \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\}$ и пусть

$$(d) \quad \mathbf{g} \in \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma), \quad \psi \in H^{1/2}(\Gamma_D), \quad \mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Под слабым решением задачи (11), (12) понимается тройка $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, p, \varphi) \in X \equiv \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}\varphi, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \lambda(\nabla \varphi, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, S) &= (f, S) + (\chi, S)_{\Gamma_N} \quad \forall S \in \mathcal{T}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g}, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \end{aligned}$$

Как в гл. 1, вводится группа фиксированных данных $u_0 = (\mathbf{b}, \mathbf{g}, \psi)$ и группа управлений $u = (f, \chi)$, причем u может изменяться на множестве $K = K_1 \times K_2 \subset L^2(\Gamma_N) \times L^2(\Omega)$. Рассматривается экстремальная задача

$$J(\mathbf{u}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{u}) + \frac{\mu_1}{2} \|f\|^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u, \mathbf{f}) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \quad (13)$$

Здесь $I(\mathbf{u})$ – функционал качества, $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{f})$ – операторное ограничение, отвечающее слабой формулировке задачи (11), (12), μ_0, μ_1 и μ_2 – положительные размерные параметры. Вводятся два функционала качества

$$I_5(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_d\|_Q^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_d\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2, \quad I_6(\mathbf{u}) = \|\operatorname{rot} \mathbf{u} - \zeta_d\|_Q^2.$$

Здесь $\mathbf{v}_d \in \mathbf{L}^2(Q)$ (либо $\zeta_d \in \mathbf{L}^2(Q)$) моделирует измеренное или желаемое в некоторой подобласти Q области Ω поле скоростей (либо завихренности). Наряду с (13) рассматривается следующая “возмущенная” задача:

$$J(\mathbf{u}, u) = \frac{\mu_0}{2} \tilde{I}(\mathbf{u}) + \frac{\mu_1}{2} \|f\|^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u, \tilde{\mathbf{f}}) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K.$$

Вводятся “модельные” числа Рейнольдса \mathcal{Re} , Рэлея \mathcal{Ra} и Прандтля \mathcal{P} :

$$\mathcal{Re} = \frac{\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0}{\delta_0 \nu}, \quad \mathcal{Ra} = \frac{\gamma_1 \beta_1 M_{\varphi}^0}{\delta_0 \nu \delta_1 \lambda}, \quad \mathcal{P} = \frac{\delta_0 \nu}{\delta_1 \lambda}, \quad M_{\mathbf{u}}^0 = \sup M_{\mathbf{u}}(u), \quad M_{\varphi}^0 = \sup M_{\varphi}(u).$$

Здесь $\delta_0, \delta_1, \gamma_0, \gamma_1, \beta_1, \beta_0, c, M$ – некоторые константы, введенные в диссертации, где $M_{\mathbf{u}}(u), M_{\varphi}(u)$ – оценки норм решений прямой краевой задачи (11), (12) для заданного элемента $u \in K$. В предположении, что выполняются условия

$$\mathcal{Re} + \mathcal{Ra} < 1/2, \quad (1 - \varepsilon)\mu_1 \geq \mu_0 c \gamma_2^2, \quad (1 - \varepsilon)\mu_2 \geq \mu_0 c, \quad \varepsilon > 0, \quad (14)$$

доказана следующая основная теорема об устойчивости решения задачи (13) относительно малых возмущений как функционала I , так и плотности \mathbf{f} .

Теорема 3. Пусть при выполнении условий (a), (d) и (14) пятерка функций $(\mathbf{u}_i, p_i, \varphi_i, f_i, \chi_i)$ является решением задачи (13) при $I = I_1$, отвечающим заданным функциям $\mathbf{v}_d = \mathbf{u}_d^{(i)} \in \mathbf{L}^2(Q)$ и $\mathbf{f}_i \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы оценки устойчивости

$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \mu_1}} \Delta, \quad \|f_1 - f_2\| \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \mu_2}} \Delta,$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 &\leq \frac{2\beta_1}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)\delta_1\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\mu_1}} \right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \Delta + \frac{2\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)}, \\ \|\varphi_1 - \varphi_2\|_1 &\leq \frac{1}{\delta_1\lambda(1-2\mathcal{R}a)} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\mu_1}} \right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \Delta + \frac{2\mathcal{R}a\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|}{\beta_1(1-2\mathcal{R}a)}, \\ \|p_1 - p_2\| &\leq \frac{(2M+1)\beta_1}{\beta_0\delta_1\lambda(1-2\mathcal{R}a)} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\mu_1}} \right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \Delta + \frac{2M+1}{\beta_0(1-2\mathcal{R}a)} \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|.\end{aligned}$$

Здесь $\Delta = \|\mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q + \alpha(\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|)$, где α – некоторая непрерывная функция, зависящая от исходных данных.

Аналогичная теорема справедлива и для функционала качества I_2 .

В третьей главе диссертации описывается разработанный алгоритм численного решения обратных экстремальных задач, основанный на методе Ньютона, и обсуждаются результаты численных экспериментов, которые проводились с помощью программных единиц, построенных в свободно распространяемых пакетах Scilab и FreeFem++.

Численное решение обратных экстремальных задач производилось посредством компьютерного моделирования, при котором дифференциальное уравнение конвекции-диффузии-реакции для стационарной модели распространения вещества дискретизировалось с помощью метода конечных разностей в программе Scilab и метода конечных элементов – в пакете FreeFem++. Для возможности сравнения результатов вычислительных экспериментов, полученных с помощью различных методов и в различных пакетах, в области Ω вводилась равномерная сетка. Для простоты исследования в качестве Ω выбиралась двумерная область на плоскости, а контуры исследуемого участка сводились к единичному квадрату с расположением границ Γ_D и Γ_N , указанным на рис. 1(а). Такое допущение в модели возможно в случае, когда глубина водной акватории мала по сравнению с шириной и длиной исследуемого участка, т.е. можно пренебречь распределением концентрации вещества по глубине. Система координат выбиралась таким образом, чтобы ось Ox была направлена вдоль потока, а ось Oy – перпендикулярно потоку. При проведении вычислительных экспериментов предполагалось, что вещество поступает в область за счет внутренних источников, приносится вместе с потоком жидкости либо поступает в результате массообмена на участке границы.

Применение метода Ньютона в разработанном алгоритме основывалось на следующей теореме, сформулированной для задачи (8), где $\varphi(\alpha)$ обозначает единственное решение краевой задачи (1), (2) при заданных значениях функций α , а также функций \mathbf{u} , f , ψ , χ .

Теорема 4. Производная от функционала \tilde{J} в любой точке $\alpha \in K$ в направлении вектора $h \in L^2(\Gamma_N)$ существует и определяется формулой

$$\langle \tilde{J}'(\alpha), h \rangle = (\mu_1\alpha + \lambda\varphi(\alpha)\eta(\alpha), h)_{\Gamma_N}, \quad h \in L^2(\Gamma_N). \quad (15)$$

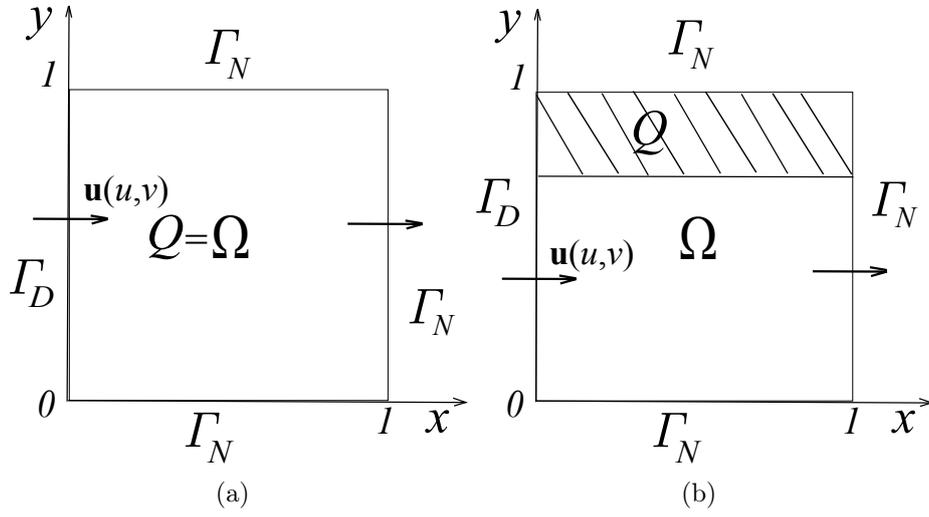


Рис. 1: Геометрия области переноса вещества

Подчеркнем, что в формулу (15) для $\tilde{J}'(\alpha)$ входит как решение $\varphi(\alpha)$ прямой задачи (1), (2), так и решение $\eta(\alpha)$ сопряженной задачи (6).

Алгоритм решения экстремальной задачи (8) состоял из следующих этапов:

- 1) выбирается начальное приближение α^0 и полагается $n = 0$;
- 2) для известного элемента α^n находится приближенное решение (матрица) φ^n прямой задачи, записанной в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} (\nabla\varphi, \nabla h) + (\alpha^n \varphi, h)_{\Gamma_N} - w_0(\partial\varphi/\partial z, h) + (k\varphi, h) + \text{Pe}(\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) = \\ = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T}, \quad \varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D; \end{aligned} \quad (16)$$

здесь $\text{Pe} = UL/\lambda$ – число Пекле, где U и L – характерные длина и скорость;

- 3) находится приближенное решение (матрица) η^n сопряженной задачи

$$\begin{aligned} (\nabla\tau, \nabla\eta) + (\alpha^n \eta, \tau)_{\Gamma_N} - w_0(\partial\tau/\partial z, \eta) + (k\tau, \eta) + \text{Pe}(\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, \eta) = \\ = -(\varphi^n - \varphi_d, \tau)_Q \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad \eta = 0 \text{ на } \Gamma_D; \end{aligned}$$

4) вычисляется вспомогательный элемент $g_j^n = \mu_1 \alpha_j^n + \lambda \varphi_{Nj}^n \eta_{Nj}^n$, $j = 1, 2, \dots, N$, имеющий согласно (15) смысл производной $J'_\alpha(\alpha^n)$ от функционала J , где φ_{Nj}^n , η_{Nj}^n – N -ые столбцы матриц φ^n и η^n ;

5) вычисляется матрица Якоби $H^n = ((\partial g_j^n / \partial \alpha_k^n))$ конечно-разностным методом, т.е. с помощью следующих формул (где s_k – малое приращение α_k^n):

$$\partial g_j^n / \partial \alpha_k^n = (g_j^n(\alpha_k^n + s_k) - g_j^n(\alpha_k^n)) / s_k, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

6) вычисляется новое значение $\alpha^{n+1} = \alpha^n - (H^n)^{-1} g^n$ элемента α ;

7) проверяется условие выхода из цикла, имеющее вид

$$(\sum_{j=1}^{N-1} (\alpha_j^{n+1} - \alpha_j^n)^2)^{1/2} < 10^{-6}. \quad (17)$$

Если условие (17) выполняется, то осуществляется выход из цикла, а за приближенное численное решение обратной задачи выбирается пара (α^n, φ^n) . В противном случае n увеличивается на 1 и осуществляется переход к п. 2.

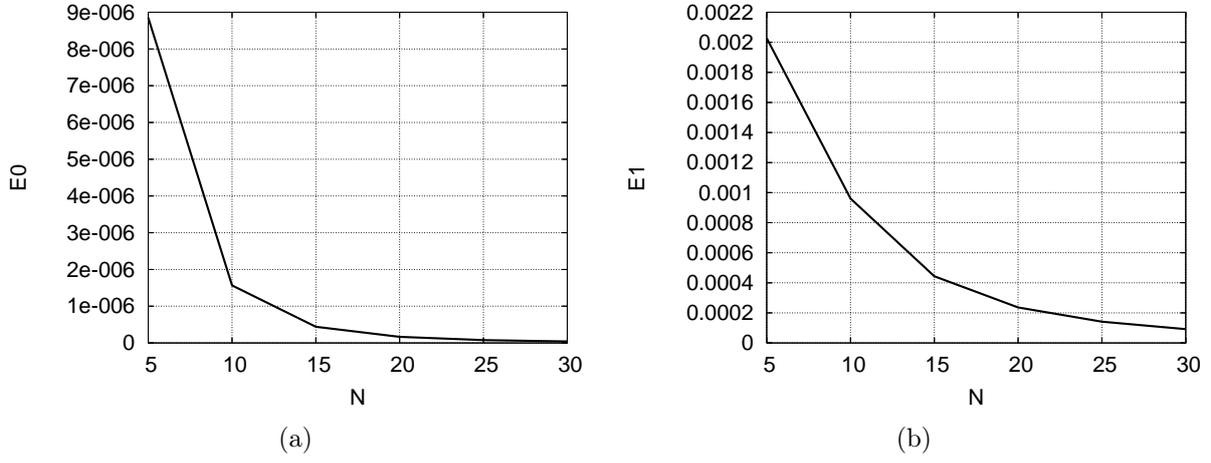


Рис. 2: Графики зависимостей ошибок E_0 (a), E_1 (b) от шага сетки

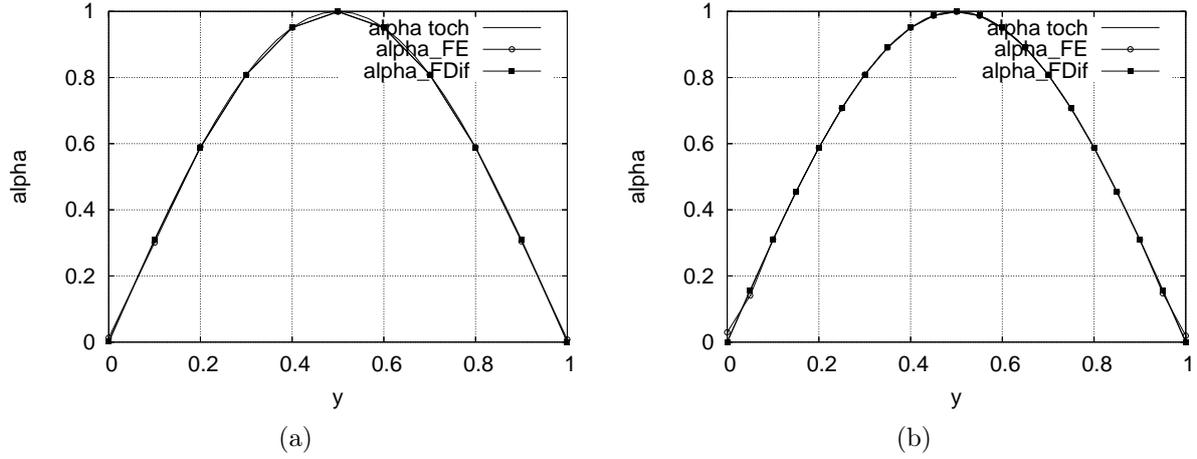


Рис. 3: Графики восстановленной функции α для $h = 0.1$ (a) и $h = 0.05$ (b)

Разработанный алгоритм решения обратной задачи (8) тестировался на точном решении $\varphi_T(x, y) = (x - x^2)(1/2y^2 - 1/3y^3) + 0.5$, $\alpha_T(y) = \sin(\pi y)$, отвечающем следующим исходным данным:

$$\lambda = 1, Pe_h = 0.05, \mu_0 = 1, w_0 = 0, \varphi|_{x=0} = 0.5, k = 0, \mathbf{u} = (1, 0),$$

$$f = -(x - x^2)(1 - 2y) + (3 - 2x)(y^2/2 - y^3/3), \chi = (y^3/3 - y^2/2) + 0.5\sin(\pi y).$$

где $Pe_h = uh/\lambda$ - сеточное число Пекле. На участках $y = 0$ и $y = 1$ границы Γ_N ставилось условие $\partial\varphi/\partial n = 0$, моделирующее отсутствие потока вещества.

Начальное приближение α_0 выбиралось равным 0. В соответствии с концепцией квазиреального эксперимента в качестве дополнительной информации φ_d использовались значения функции φ_T , заданные в подобласти Q области Ω в предположении, что все входные параметры известны. Точность решения обратной задачи определялась с помощью ошибок $E_0 = \|\varphi - \varphi_d\|_Q / \|\varphi_d\|_Q$ и $E_1 = \|\alpha - \alpha_d\|_{\Gamma_N} / \|\alpha_d\|_{\Gamma_N}$, значения которых зависят от выбора параметра μ_1 , шага сетки h , площади области дополнительных измерений Q и других параметров. Поле концентрации рассчитывалось с учетом граничных условий и условий устойчивости разностной схемы.

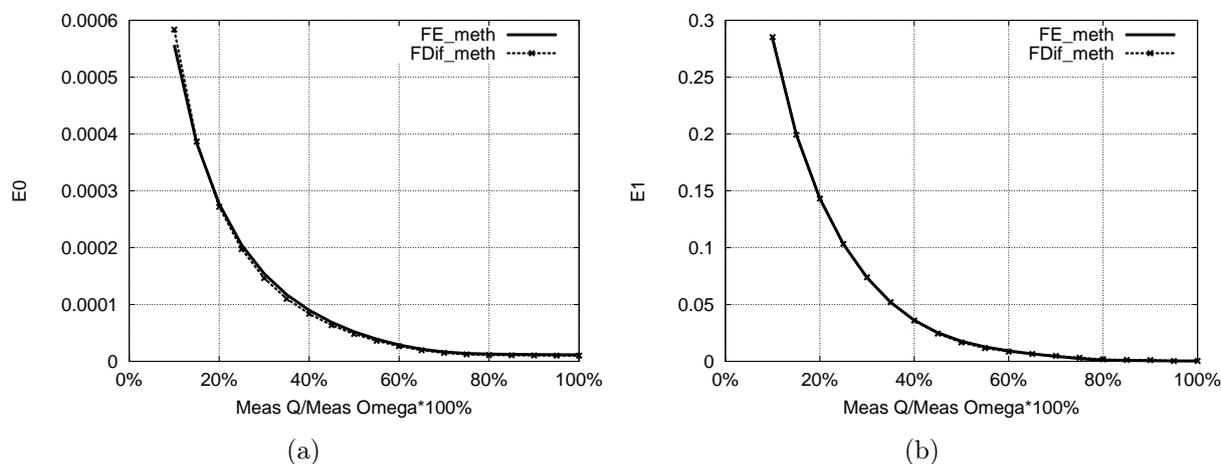


Рис. 4: Графики зависимостей ошибок E_0 (a) и E_1 (b) от размера области Q

На рис. 2 приведены графики зависимостей ошибок E_0 и E_1 от размера h шага сетки при $Q = \Omega$ и $\mu_1 = 10^{-5}$. Полученные графики показывают, что при уменьшении шага h значения ошибок также уменьшаются. Этот вывод подтверждают графики восстановленной функции α на рис. 3, где “alpha toch” соответствует точным значениям $\alpha = \alpha_d$, “alpha_FDif” – решение обратной задачи, полученное в пакете Scilab, а “alpha_FE” – решение обратной задачи, полученное в пакете FreeFem++, для $h = 0.1$ (a) и $h = 0.05$ (b).

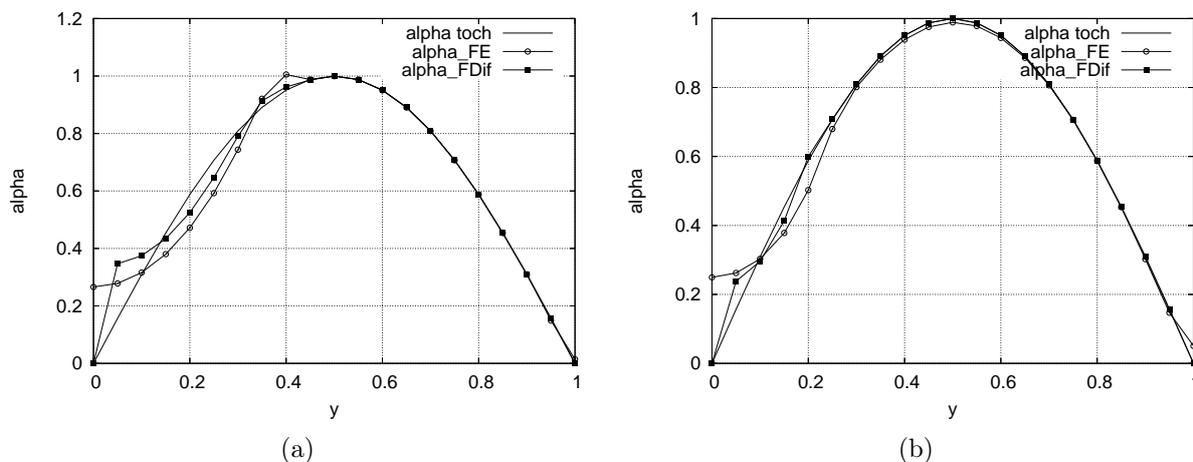


Рис. 5: Графики восстановленной функции α для различных размеров области Q

На рис. 4 представлены графики зависимостей ошибок E_0 и E_1 от площади области Q для случая, когда область Q выбиралась так как показано на рис. 1(b). Видно, что увеличение площади области Q повышает точность решения обратной задачи. Это подтверждают и графики восстановленной функции α , приведенные на рис. 5(a) для случая, когда площадь области Q составляет 50% от площади Ω , и на рис. 5(b) – для случая, когда площадь области Q составляет 70%.

Алгоритм решения второй обратной задачи, заключающийся в восстановлении функции χ , имеющей смысл потока вещества через участок Γ_N при $x = 1$, тести-

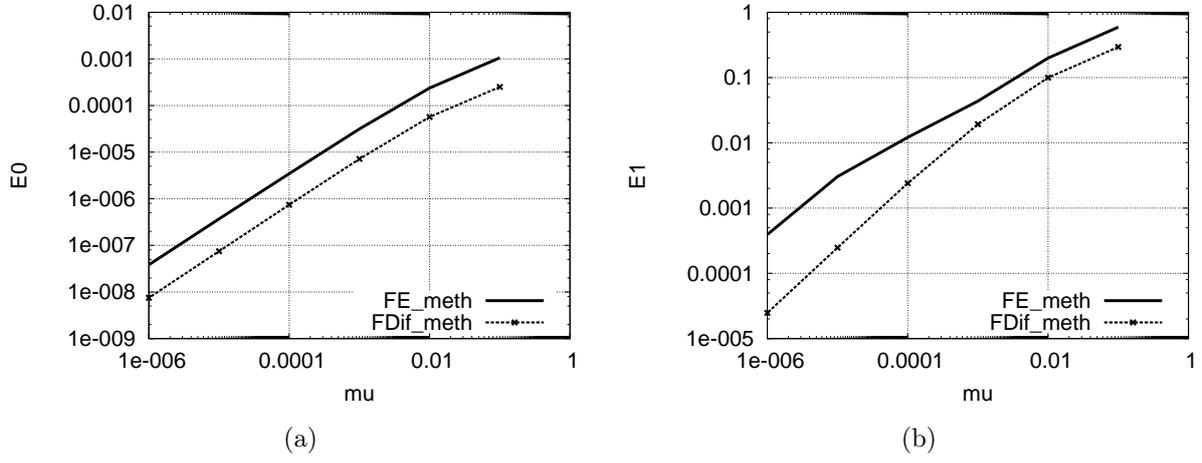


Рис. 6: Графики зависимостей ошибок E_0 (a), E_2 (b) от μ_2

ровался при $\chi_T(y) = 0.02\sin(\pi y)$ и следующем выборе других исходных данных:

$$\lambda=0.2, Pe_h=0.25, \mu_0=1, w_0=0, \varphi|_{x=0}=2, k=0, f=0, \mathbf{u}=(1, 0), \alpha=0.01\sin(\pi y).$$

В качестве φ_d выбирались значения решения прямой краевой задачи, найденные с использованием мелкой сетки. Результаты численных экспериментов приведены на рис. 6 в виде графиков зависимостей ошибок E_0 и $E_2 = \|\chi - \chi_d\|_{\Gamma_N} / \|\chi_d\|_{\Gamma_N}$ от параметра регуляризации μ_2 при $Q = \Omega$. На рис. 7 приведены графики зависимостей ошибок E_0 и E_2 от размеров области Q , расположенной как показано на рис. 1(b). Графики восстановленной величины χ представлены на рис. 8(a) в случае, когда $Q = \Omega$, и на рис. 8(b) – в случае, когда площадь области Q составляет 50% от площади Ω .

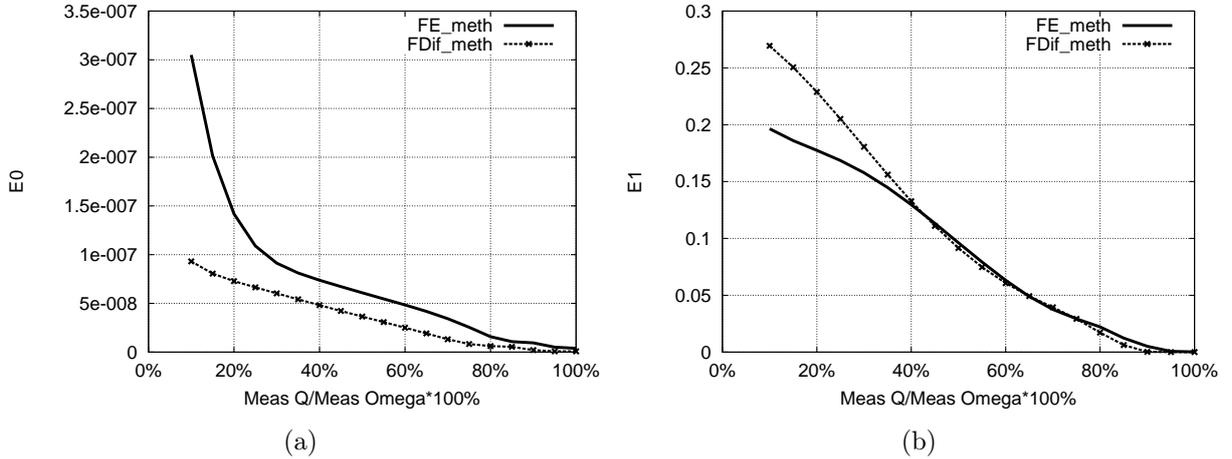


Рис. 7: Графики зависимостей ошибок E_0 (a), E_2 (b) χ от величины области Q при $\mu_2 = 10^{-5}$

Цикл исследований эффективности разработанного алгоритма был проведен для случая, когда исходные данные в виде функции φ_d измерялись с погрешностью δ , которая вводилась с помощью формулы

$$\varphi_d = \varphi_T + 2\delta(\text{random}[0, 1] - 0.5).$$

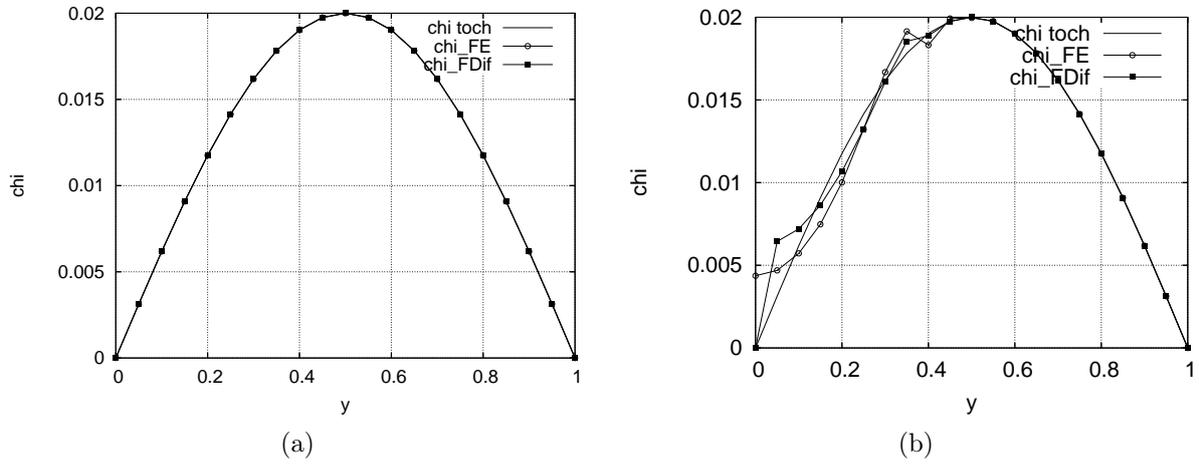


Рис. 8: Графики восстановленной функции χ для $Q=\Omega$ (a) и для $measQ/meas\Omega=50\%$ (b)

Отвечающие этому случаю графики зависимостей ошибок E_0 и E_2 от параметра μ_2 представлены при $Q = \Omega$ на рис. 9 для значения $\delta = 10^{-5}$. В отличие от предыдущих графиков уменьшение E_2 с уменьшением μ_2 наблюдалось лишь при уменьшении μ_2 до определенного значения μ_2^0 , равного в данном случае 10^{-5} .

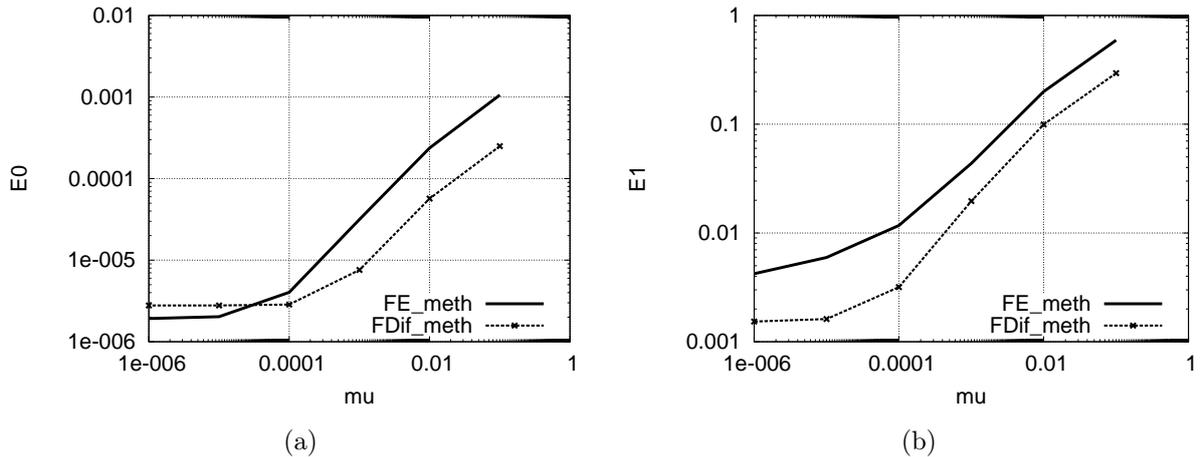


Рис. 9: Графики зависимостей ошибок E_0 (a), E_2 (b) для χ от параметра μ_2

Результаты проведенных вычислительных экспериментов наглядно подтверждают высокую эффективность используемого в диссертации численного алгоритма, разработанного на основе построенной в предыдущих главах теории. Более подробный анализ результатов численных экспериментов приведен в гл. 3.

Основные результаты и выводы, полученные в диссертации:

1. Сформулированы и исследованы коэффициентные обратные экстремальные задачи для линейного стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции. Построены системы оптимальности. На основе их анализа установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование, единственность и устойчивость их решений. Разработаны эффективные численные алгоритмы решения конкретных экстремальных задач, основанные на методе Ньютона.

2. Сформулированы и исследованы обратные экстремальные задачи для нели-

нейной модели массопереноса, описывающей перенос вещества в рамках классического приближения Обербека–Буссинеска. Построены системы оптимальности. Установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование, единственность и устойчивость решений конкретных обратных экстремальных задач относительно малых возмущений используемого функционала качества и одной из заданных функций, входящих в рассматриваемую модель.

3. На основе разработанных алгоритмов с помощью свободно распространяемого пакета FreeFem++ и пакета прикладных математических программ для научных расчётов Scilab реализованы и протестированы программы для решения граничных обратных экстремальных задач для двумерного стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции.

4. Установлены зависимости точности восстановления неизвестного коэффициента массообмена, входящего в граничное условие третьего рода для концентрации на части границы, от выбора значения параметра, входящего в регуляризирующую добавку минимизируемого функционала качества, начального приближения, размера и расположения области измерений и погрешности измерений. Аналогичные зависимости были получены при численном решении обратной задачи восстановления неизвестной функции, имеющей смысл потока вещества через участок границы области течения.

В заключение хочу выразить благодарность научному руководителю доктору физ.-мат. наук профессору Г.В. Алексееву за постановку задачи и ценные обсуждения результатов работы, а также кандидатам физ.-мат. наук Д.А. Терешко и Р.В. Бризицкому за полезные замечания, направленные на улучшение содержания работы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Алексеев Г.В., Клевчихин Ю.А., Соболева О.В.* О корректности коэффициентной обратной экстремальной задачи для стационарной модели тепловой конвекции // Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. науки. 2006. Вып. 9. С. 157–166.
2. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. №4. С. 24–35.
3. *Соболева О.В.* Численный анализ задачи идентификации граничного коэффициента для уравнения конвекции–диффузии // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал) Mining informational and analytical bulletin (scientific and technical journal). 2009. Т. 17. №12. С. 133–135.
4. *Алексеев Г.В., Соболева О.В.* Об устойчивости решений экстремальных задач для стационарных уравнений массопереноса // Дальневосточный математический журнал. 2009. Т. 9. №1–2. С. 5–14.
5. *Соболева О.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Дальневосточный математический журнал. 2010. Т. 10. №2. С. 171–184.

6. *Алексеев Г.В., Прокопенко С.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи оптимального управления для некоторых моделей распространения загрязнений // Вычислительные технологии. Спец. вып. 2003. Т.8. Ч. 4. С. 65–71.
7. *Соболева О.В.* Численный анализ задач управления для стационарной модели конвекции–диффузии // Тезисы докл. ДВ матем. шк.–семинара им. ак. Е.В. Золотова. 2003. С. 97–98.
8. *Соболева О.В.* Исследование обратной задачи для двумерного эллиптического уравнения // Тезисы докл. ДВ матем. шк.–семинара им. ак. Е.В. Золотова. 2006. С. 96.
9. *Алексеев Г.В., Соболева О.В.* Теоретический анализ обратных экстремальных задач распространения примеси // Вычислительные технологии. Спец. вып. 2004. Т. 9. Ч. 1. С. 167–175
10. *Соболева О.В.* Численное исследование задач идентификации источников для некоторых моделей распространения загрязнений // Тезисы докл. ДВ матем. шк.–семинара им. ак. Е.В. Золотова. 2005. С. 114–115.
11. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Тучак М.Н.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений распространения загрязнений // Труды международной конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”. Павлодар. Т. 1. 2006. С. 93–102.
12. *Соболева О.В., Клевчихин Ю.А., Тучак М.Н.* Анализ обратных экстремальных задач для стационарных моделей распространения загрязнений // II международная научная конференция “Проблемы экологии, безопасности жизнедеятельности и рационального природопользования Дальнего Востока и стран АТР”. 2006. С. 393–396.
13. *Соболева О.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарной модели распространения загрязнений // Тезисы докл. ДВ матем. шк.–семинара им. ак. Е.В. Золотова. 2007. С. 98.
14. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Препринт № 5. ДВО РАН. Институт прикладной математики. Владивосток: Дальнаука, 2008. 40 с.
15. *Соболева О.В.* Численный анализ обратной экстремальной задачи для модели распространения загрязнений в природных водоемах // Тезисы докл. конференции молодых ученых Тихоокеанского океанологического института им. В.И. Ильичева ДВО РАН “Океанологические исследования” 2008. С. 125–126.
16. *Соболева О.В.* Численный анализ граничных обратных задач для уравнения переноса вещества методом сеток // Тезисы докл. ДВ матем. шк.–семинара им. ак. Е.В. Золотова. 2008. С. 96–97.
17. *Соболева О.В.* Численный анализ обратных коэффициентных задач для стационарного уравнения конвекции–диффузии // Тезисы докл. XXXIV ДВ матем. шк.–семинара им. ак. Е.В. Золотова. 2009. С. 121–122.
18. *Соболева О.В.* Численный анализ задачи граничного управления для уравнения конвекции–диффузии // Тезисы докл. всероссийской конференции, приуроченной к 70-летию академика В.А. Левина. 2009. С. 16–17.
19. *Алексеев Г.В., Соболева О.В.* Решение обратной задачи восстановления коэффициента массообмена на границе исследуемой области для уравнения конвекции–диффузии–реакции / Св-во о рег. прогр. для ЭВМ №2011613758 от 13.05.2011.

Ольга Владимировна СОБОЛЕВА

**ОБРАТНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ
ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 12.10.2011 г.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 1. Уч-изд. л. 0,89. Тираж 100 экз. Заказ 115

Отпечатано в типографии ФГУП Издательство “Дальнаука” ДВО РАН
690041, г. Владивосток, ул. Радио. 7