На правах рукописи

Лосев Александр Сергеевич

Быстрые алгоритмы вычисления надежности случайных сетей

Специальность: 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток
2010

Работа выполнена в лаборатории вероятностных методов и системного анализа Института прикладной математики ДВО РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Цициашвили Гурами Шалвович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Нурминский Евгений Алексеевич

доктор технических наук,
доцент Головко Николай Иванович

Ведущая организация: Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск

Защита состоится 10 декабря 2010 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 005.007.01 в Институте автоматики и процессов управления ДВО РАН по адресу: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института автоматики и процессов управления ДВО РАН.

Автореферат разослан $\ll$ 01 $\gg$ ноября 2010 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 005.007.01,
к.т.н. А.В. Лебедев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В ходе технического развития и создания более сложных по своей структуре и организации технических систем требования к их надежности возрастают с каждым днем. Новые развивающиеся технологии требуют более современных, быстрых и экономичных методов вычисления надежности. Этим объясняется интерес многих авторов к моделированию различных систем, в том числе технических, и изучению их надежности.

В качестве объекта исследования в диссертационной работе выступает модель сети, представимая в виде графа, ребра которого с заданными вероятностями могут быть работоспособными или неработоспособными. Характеристиками надежности рассматриваемых моделей является вероятность существования работоспособного пути между двумя фиксированными вершинами или работоспособных путей между любыми двумя вершинами. К основным задачам моделирования таких сетей относится вычисление указанных характеристик и исследование их зависимости как от структуры графа, так и от вероятностей работоспособностей отдельных ребер.

Первые попытки определить вероятность работоспособности прямыми методами (Ушаков И.А., Barlow R., Proschan F., Рябинин И.А.) привели к большим объемам вычислений, сложность которых растет геометрически с ростом числа ребер. Поэтому изучение было сведено к рассмотрению специальных моделей случайных сетей и методов их исследования, для которых объемы вычислений можно было бы существенно сократить.

В частности, Ушаковым И.А., Barlow R.E., Proschan F. были построены линейные по сложности алгоритмы вычисления надежности случайных сетей, состоящих из некоторого набора ребер, параллельно и последовательно соединенных. В работах Соложенцева Е.Д. для вычисления характеристик надежности использовалась логическая функция, построенная с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Асимптотический подход к решению вопроса надежности стохастических сетей был реализован в работах Буртина и Питтеля. Они получили формулы для вероятности работоспособности сети с ребрами, имеющими одинаковую и малую вероятность отказа. В рамках этой же модели Герцбах И., Родионов А.С. прямое вычисление надежности свели к определению целочисленных коэффициентов некоторого многочлена.

Для модели случайных сетей более общего вида Полесским В.П. и Громовым Ю.Ю. были построены верхние и нижние оценки вероятности связности (существования работоспособных путей между любыми двумя вершинами) для сети общего вида.

Однако в последнее время появляются новые задачи, которые требуют развития методов моделирования случайных сетей. К их числу, например, относятся сети интернетовского типа (Ball M.O., Colbourn C.J.), которые строятся на базе древовидных соединений. Замена образующей сети радиального вида в древовидном соединении на радиально-кольцевую незначительно отражается на связи между вершинами, но существенно усложняет поиск характеристик надежности в отдельно взятой подсистеме. Добавление кольцевых ребер приводит к тому, что наличие связи между центром и вершиной на кольце, которая раньше характеризовалась надежностью одного ребра, теперь определяется через всевозможные соединения, что значительно усложняет вычисление надежности всей сети.

Поэтому актуальным направлением в области изучения надежности сетей интернетовского типа и других случайных сетей, является разработка и построение быстрых алгоритмов вычисления основных характеристик надежности, желательно линейной сложности. Это определило цели и задачи диссертационной работы.

***М*етоды исследования** основаны на элементах теории вероятностей, теории надежности, теории графов, на полученных оригинальных алгоритмах и асимптотических соотношениях.

***Ц*ель и задачи работы.** Целью диссертационной работы является разработка и исследование быстрых алгоритмов вычисления надежности случайных сетей. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Построение асимптотических соотношений для надежности случайных сетей с оценкой точности.
2. Разработка алгоритмов вычисления параметров полученных асимптотических соотношений и оценка их сложности.
3. Аналитическое и численное исследование надежности различных классов композиций случайных сетей.

***Н*аучная новизна.**

1. Построены асимптотические соотношения для вычисления вероятности работоспособности и отказа случайных сетей и получены оценки их относительной погрешности.
2. Разработаны алгоритмы вычисления параметров полученных асимптотических формул, алгоритмы определения узких мест и выявлено условие асимптотической инвариантности.

3. Построены оптимальные алгоритмы вычисления надежности сетей интернетовского типа как рекурсивно определимых сетей.

***Т*еоретическая и практическая ценность.** Теоретическая ценность работы состоит в том, что полученные асимптотические соотношения надежности, могут быть использованы для построения и изучения новых рекурсивно определимых классов случайных сетей, в том числе сетей с зависимыми элементами.

Практическая ценность заключается в том, что алгоритмы построенные на базе рекурсивных и асимптотических соотношений, могут быть использованы для диагностики надежности и конструирования различных конкретных сетей.

***Д*остоверность результатов исследования** обеспечивается строгими математическими выкладками и результатами вычислительных экспериментов.

***А*пробация результатов.** Результаты диссертационной работы докладывались на двух Дальневосточных конференциях студентов и аспирантов по математическому моделированию (2007 г., 2009 г.), на четырех Дальневосточных математических школах-семинарах имени Е.В. Золотова (2007-2010 гг.), на семинарах ИПМ ДВО РАН (2010 г.), ВЦ ДВО РАН (2010 г.), ИАПУ ДВО РАН (2010 г.), на XXXVIII-XXXIX Российской школе (2008-2009 гг.), на 9-й международной конференции "Reliability and Statistics in Transportation and Communication" (2009 г.).

***П*убликации.** По материалам диссертационной работы опубликовано 18 работ, в том числе 3 статьи в журналах из списка ВАК.

***С*труктура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 107 наименований. Основное содержание изложено на 81 странице, включая 20 рисунков.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, формулируется проблема, приводится литературный обзор, ставятся цели и задачи работы.

В первой главе получены асимптотические соотношения для вероятности и для логарифма вероятности работоспособности или отказа случайной сети при различных асимптотических условиях, накладываемых на её элементы. Для некоторого класса асимптотик построены алгоритмы нахождения узких мест, резервирование которых качественно изменяет надежность сети. Полученные результаты были применены к моделям времени жизни Вейбулла и Гомперца, для которых были найдены качественные оценки сходимости.

В диссертационной работе в качестве модели случайной сети рассматривается неориентированный граф Γ с конечным множеством вершин U, множеством ребер W и множество всех ациклических путей $\mathcal{R} = \{R_1, ..., R_n\}$ из начальной вершины u_* в конечную v_*. Обозначим $\alpha(w)$, $w \in W$, независимые случайные величины, характеризующие работоспособность ребер. Наша задача заключается в вычислении вероятности работоспособности $P_\Gamma = P\left(\bigcup\limits_{R\in\mathcal{R}} \bigcap\limits_{w\in R} (\alpha(w) = 1)\right)$, т.е. вероятности существования хотя бы одного работающего пути между вершинами u_*, v_* и вероятности отказа $\overline{P}_\Gamma = 1 - P_\Gamma$.

Интерес представляют два случая, когда вероятность работоспособности ребер графа p_w близка к нулю (низконадежные элементы) и когда близка к единице (высоконадежные элементы). Будем полагать, что вероятность работоспособности $p_w = p_w(h)$ и вероятность отказа $\overline{p}_w = \overline{p}_w(h) = 1 - p_w(h)$ есть функции от безразмерного малого параметра $h \to 0$, имеющего произвольную природу.

В частности, для моделей времени жизни в условиях, когда время жизни $\tau(w)$ отдельного ребра $w \in W$ подчиняется закону Вейбулла $p_w(h) = P(\tau(w) > t) = \exp(-t^\beta)$ или закону Гомпертца, тогда $p_w(h) = P(\tau(w) > t) = \exp(-e^{t\beta})$, где $\beta > 0$. Параметр h имеет следующий смысл $h = h(t) = 1/t$ или $h(t) = e^{-t}$, соответственно, в результате чего $P(\tau(w) > t) = \exp(-h(t)^{-\beta})$.

Теорема 1. *Если* $p_w = p_w(h) \to 0$ *при* $h \to 0$ *для* $w \in W$, *то*

$$P_\Gamma \sim \sum_{R\in\mathcal{R}} \prod_{w\in R} p_w(h), \tag{1}$$

где относительная погрешность полученного соотношения не превосходит $n \max\limits_{w\in W} p_w(h) \to 0,\ h \to 0$.

Обозначим множество всех разрезов $\mathcal{L} = \{L(A),\ A \in \mathcal{A}\}$ в графе Γ, где $\mathcal{A} = \{A \subset U,\ u_* \in A, v_* \notin A\}, L = L(A) = \{(u, v) : u \in A, v \notin A\}$. Определим через $\mathcal{L}_1 = \{L_1, ..., L_m\}$ совокупность минимальных по теоретико-множественному включению элементов из множества $\mathcal{L}$.

Теорема 2. *Если* $\overline{p}_w = \overline{p}_w(h) \to 0$ *при* $h \to 0$ *для* $w \in W$, *то*

$$\overline{P}_\Gamma \sim \sum_{L\in\mathcal{L}_1} \prod_{w\in L} \overline{p}_w(h), \tag{2}$$

где относительная погрешность полученного соотношения не превосходит $m \max\limits_{w\in W} \overline{p}_w(h) \to 0,\ h \to 0$.

Рассмотрение случайных сетей с низконадежными и высоконадежными элементами в случаях степенной и экспоненциальной зависимости позволило получить ряд следствий. Обозначим через $d(w), g(w)$ длину и пропускную способность ребра w соответственно.

Следствие 1.
1) *Если* $p_w(h) \sim h^{d(w)},\ h \to 0,$ *где* $d(w) > 0,\ w \in W,$ *то*

$$P_\Gamma \sim \widehat{N}(\mathcal{R}) h^{D(\mathcal{R})},\ h \to 0, \tag{3}$$

где $\widehat{N}(\mathcal{R})$ *– число путей длины* $D(\mathcal{R}) = \min\limits_{R \in \mathcal{R}} \sum\limits_{w \in R} d(w).$

2) *Если* $\overline{p}_w(h) \sim h^{g(w)},\ h \to 0$ *где* $g(w) > 0,\ w \in W,$ *то*

$$\overline{P}_\Gamma \sim \widehat{N}(\mathcal{L}) h^{G(\mathcal{L})},\ h \to 0, \tag{4}$$

где $\widehat{N}(\mathcal{L})$ *– число разрезов с пропускной способностью* $G(\mathcal{L}) = \min\limits_{L \in \mathcal{L}} \sum\limits_{w \in L} g(w).$

3) *Если* $p_w(h) \sim \exp(-h^{-d(w)}),\ h \to 0$ *где* $d(w) > 0,\ w \in W,$ *то*

$$-\ln P_\Gamma \sim \mathcal{N}(\mathcal{R}) h^{-\widetilde{D}(\mathcal{R})},\ h \to 0, \tag{5}$$

где $\mathcal{N}(\mathcal{R})$ *– минимальное количество ребер длины* $\widetilde{D}(\mathcal{R}) = \min\limits_{R \in \mathcal{R}} \widetilde{D}(R)$ *в путях минимальной псевдодлины* $\widetilde{D}(R) = \max\limits_{w \in R} d(w).$

4) *Если* $\overline{p}_w(h) \sim \exp(-h^{-g(w)}),\ h \to 0,$ *где* $g(w) > 0,\ w \in W,$ *то*

$$-\ln \overline{P}_\Gamma \sim \mathcal{N}(\mathcal{L}) h^{-\widetilde{G}(\mathcal{L})},\ h \to 0, \tag{6}$$

где $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ *– минимальное количество ребер с пропускной способностью* $\widetilde{G}(\mathcal{L}) = \min\limits_{L \in \mathcal{L}} \widetilde{G}(L)$ *в разрезах с минимальной псевдопропускной способностью* $\widetilde{G}(L) = \max\limits_{w \in L} g(w).$

Результат п.3 следствия 1 удалось усилить в предположении, что для различных ребер w', w'' значения $d(w'), d(w'')$ различны. Для этого пронумеруем ребра пути $R_i : d(w_1^i) > d(w_2^i) > \ldots > d(w_{m_i}^i)$, где m_i –число ребер в пути R_i. Обозначим $D^i = (d(w_1^i), \ldots, d(w_{m_i}^i))$ и введем на множестве векторов $\{D^i,\ 1 \le i \le n\}$ отношение линейного порядка, т.е. $D^p \succ D^q$, если при $k \le \min(m_p, m_q)$ первые $k-1$ компонент у этих векторов совпадают, а k-ая компонента у вектора D^p больше, чем у вектора D^q. Без ограничения общности положим $D^1 \succ D^2 \succ \ldots \succ D^n$.

Теорема 3. *Если* $p_w(h) = \exp(-h^{-d(w)}),\ \ h \to 0,$ *где* $d(w) > 0,\ w \in W,$ *то*

$$P_\Gamma \sim \exp\left(-\sum_{j=1}^{m_1} h^{-d(w_j^1)}\right).$$

В условиях п. 3–4 следствия 1 была решена задача оптимального резервирования, которая свелась к определению узких мест графа. Под узкими местами понимается множество ребер графа, изменение надежности которых качественно изменяет надежность всего соединения. Обозначим

$$S_R = \{w \in R: \ d(w) = \widetilde{D}(\mathcal{R})\}, \ \ T_L = \{w \in L: \ g(w) = \widetilde{G}(\mathcal{L})\}.$$

Определение. *Совокупности* $\mathcal{S}'$, $\mathcal{T}'$ *минимальных по включению множеств из* $\mathcal{S} = \{w \in S_R, \ R \in \mathcal{R}\}$ *и* $\mathcal{T} = \{w \in T_L, \ L \in \mathcal{L}\}$, *соответственно, называются* ***узкими местами*** *в графе* Γ.

Вместе с тем была поставлена и решена обратная задача. Были получены условия асимптотической инвариантности для всех соотношений следствия 1, т.е. условия, при которых надежность всей сети асимптотически не зависит от надежности того или иного ребра. Для этого определим граф Γ_w^0 путем исключения из графа Γ ребра $w = (u, u')$, а граф Γ_w^1 путем склеивания в графе Γ_w^0 вершин $u, \ u'$.

Утверждение 1. *В условиях п.1 следствия 1 асимптотический параметр* $D(\mathcal{R})$ *соотношения (3) вычисляется по формуле*

$$D(\mathcal{R}) = \min[d(w) + D(\mathcal{R}_w^1), \ D(\mathcal{R}_w^0)], \ D(\mathcal{R}_w^1) \le D(\mathcal{R}_w^0),$$

где множества $\mathcal{R}_w^1$, $\mathcal{R}_w^0$, *для графов* Γ_w^1, Γ_w^0 *понимаются в том же смысле, что и* $\mathcal{R}$ *для графа* Γ.

Следствие 2. ***(Условие инвариантности).*** *Параметр* $D(\mathcal{R})$ *не зависят от константы* $d(w)$ *тогда и только тогда, когда* $D(\mathcal{R}_w^1) = D(\mathcal{R}_w^0)$.

Аналогичные результаты были получены для всех пунктов следствия 1.

Утверждения п. 3–4 следствия 1 были применены к моделям времени жизни.

Утверждение 2. *Если* $P(\tau(w) > t) \sim \exp(-t^{d(w)}), \ t \to \infty$, *где* $d(w) > 0$, $w \in W$, *то*

$$-\ln P(\tau(\Gamma) > t) \sim \mathcal{N}(\mathcal{R}) t^{\widetilde{D}(\mathcal{R})}, \ t \to \infty. \tag{7}$$

Утверждение 3. *Если* $P(\tau(w) > t) \sim \exp(-e^{td(w)}), \ t \to \infty$, *где* $d(w) > 0$, $w \in W$, *то*

$$-\ln P(\tau(\Gamma) > t) \sim \mathcal{N}(\mathcal{R}) \exp(t \ \widetilde{D}(\mathcal{R})), \ t \to \infty. \tag{8}$$

Замечание 1. *Сравнительный анализ построенных относительных погрешностей для соотношений (7), (8), показал, что асимптотическая сходимость для логарифма распределения Гомпертца значительно быстрее сходимости для логарифма распределения Вейбулла, что подтвердили результаты вычислительных экспериментов.*

Во второй главе рассмотрен ряд моделей случайных сетей, которые по мнению Х.И. Черне, Н.А. Ушакова, И.А. Рябинина имеют практическую значимость. Речь идет о мостиковой схеме, о схеме трансформатора, о схеме двух "звезд" , включенных на треугольник, о структурно-сложной схеме и радиально-кольцевой схеме общего вида. Отличительной особенностью этих схем, помимо того, что каждая реализована во многих технических устройствах, является то, что использование прямых методов вычисления для определения их надежности требует неоправданно большого количества операций в зависимости от количества элементов, содержащихся в соединении.

Для всех перечисленных соединений и их модификаций построены алгоритмы нахождения параметров асимптотических соотношений следствия 1. В качестве примера остановимся на мостиковой схеме (рис. 1).

Обозначим модель данного соединения через граф Г с множеством вершин $U = \{u_0, u_1,\ u_2, u_3\}$ и множеством ребер $W = \{w_1 = (u_0, u_1),$ $w_2 = (u_0, u_2),\ \ w_3 = (u_1, u_3),\ \ w_4 = (u_2, u_3),\ \ w_5 = (u_1, u_2)\}$, вершина u_0 - начальная, а u_3 - конечная, ребро w_5 называется мостиком.

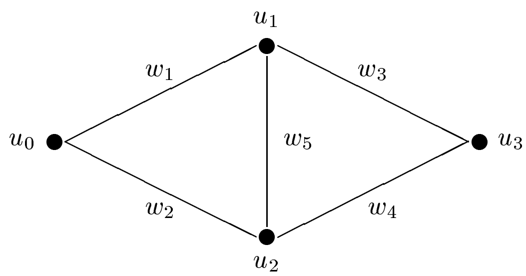

Рис. 1. Мостиковая схема Г.

Для определения вероятности работоспособности данного соединения, например, в условиях п. 1 следствия 1 получено

$$\begin{gathered} D(\mathcal{R}) = \min[d(w_5) + D(\mathcal{R}^1_{w_5}),\ D(\mathcal{R}^0_{w_5})], \\ D(\mathcal{R}^0_{w_5}) = \min((d(w_1) + d(w_3)), (d(w_2) + d(w_4))), \\ D(\mathcal{R}^1_{w_5}) = \min(d(w_1), d(w_2)) + \min(d(w_3), d(w_4)). \end{gathered} \tag{9}$$

Для рассматриваемой схемы было сформулировано условие инвариантности. Константа $D(\mathcal{R})$ не зависит от $d(w_5)$, т.е. $D(\mathcal{R}^0_{w_5}) = D(\mathcal{R}^1_{w_5})$, выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

$$1)\ d(w_4) \geq d(w_3),\ d(w_2) \geq d(w_1),\ 2)\ d(w_3) \geq d(w_4),\ d(w_1) \geq d(w_2).$$

Полученные в этой части работы результаты позволяют построить быстрые и минимальные по числу арифметических операций алгоритмы вычисления вероятности работоспособности и вероятности отказа рассматриваемых моделей и посмотреть влияние надежности отдельных элементов на надежность всей системы.

В третьей главе строятся быстрые алгоритмы вычисления надежности различных композиций сетей. С одной стороны, алгоритмы основаны на результатах, полученных в предыдущих главах, а с другой стороны, на способах построения сетей. Речь идет о склеивании сетей в единственной вершине, о замене ребра одной сети подобной ей сетью и о рекурсивном определении сетей. Построенные в этой главе алгоритмы вычисления асимптотических параметров, характеризующих надежность сети, минимальны по числу арифметических операций.

Рассмотрим параллельное соединение графов $\Gamma_1 \parallel \Gamma_2$, полученное склеиванием начальных и конечных вершин графов Γ_1, Γ_2, и последовательное соединение $\Gamma_1 \to \Gamma_2$, полученное склеиванием конечной вершины графа Γ_1 с начальной вершиной графа Γ_2. Остановимся на одном из результатов, полученных в следствии 1. Предположим, что параметры $d(w)$ для всех ребер в рассматриваемых соединениях различны.

Утверждение 4. *Если* $-\ln P(\alpha(\Gamma_i) = 1) \sim h^{-\widetilde{D}(\mathcal{R}_i)}$, $i = 1, 2$, *при* $h \to 0$, *то*

$$-\ln P_{\Gamma_1 \to \Gamma_2} \sim h^{-\widetilde{D}(\mathcal{R}_{\Gamma_1 \to \Gamma_2})},$$
$$-\ln P_{\Gamma_1 \parallel \Gamma_2} \sim h^{-\widetilde{D}(\mathcal{R}_{\Gamma_1 \parallel \Gamma_2})},$$

где

$$\widetilde{D}(\mathcal{R}_{\Gamma_1 \to \Gamma_2}) = \max(\widetilde{D}(\mathcal{R}_1), \widetilde{D}(\mathcal{R}_2)), \quad \widetilde{D}(\mathcal{R}_{\Gamma_1 \parallel \Gamma_2}) = \min(\widetilde{D}(\mathcal{R}_1), \widetilde{D}(\mathcal{R}_2)),$$

В свою очередь, узкие места определяются из соотношений

$$w'_{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2} = \begin{cases} w'_1, \ \widetilde{D}(\mathcal{R}_1) > \widetilde{D}(\mathcal{R}_2), \\ w'_2, \ \widetilde{D}(\mathcal{R}_1) < \widetilde{D}(\mathcal{R}_2), \end{cases}$$

$$w'_{\Gamma_1 \parallel \Gamma_2} = \begin{cases} w'_1, \ \widetilde{D}(\mathcal{R}_1) < \widetilde{D}(\mathcal{R}_2), \\ w'_2, \ \widetilde{D}(\mathcal{R}_1) > \widetilde{D}(\mathcal{R}_2). \end{cases}$$

Здесь множества $\mathcal{R}_i$, $\mathcal{R}_{\Gamma_1 \to \Gamma_2}$, $\mathcal{R}_{\Gamma_1 \parallel \Gamma_2}$, $i = 1, 2$, для графов Γ_i, $\Gamma_1 \to \Gamma_2$, $\Gamma_1 \parallel \Gamma_2$ понимаются в том же смысле, что и $\mathcal{R}$ для графа Γ, а ребра w'_1, w'_2, $w'_{\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2}$, $w'_{\Gamma_1 \parallel \Gamma_2}$ являются узкими местами в соответствующих графах.

Аналогичные алгоритмы определения узких мест и параметров асимптотических соотношений были построены для всех пунктов следствия 1.

Помимо параллельно-последовательных соединений большой интерес в последнее время вызывают сети интернетовского типа. Речь идет о сетях, построенных приклеиванием радиально-кольцевой сети к единственной вершине построенной ранее сети (рис. 2).

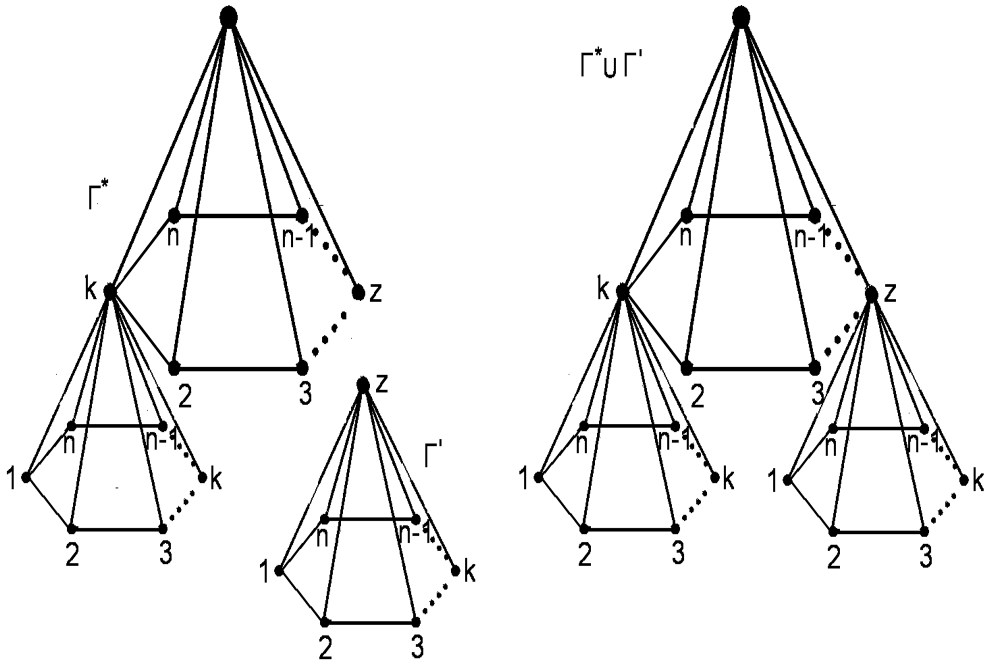

Рис. 2. Сеть интернетовского типа.

Пусть $\mathcal{D}'$ - совокупность двухполюсников $\Gamma'_1, ..., \Gamma'_l$ радиально-кольцевого вида с непересекающимися множествами ребер. Определим рекурсивно класс сетей $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, следующим образом. Пусть сети $\Gamma^* \in \mathcal{D}$, $\Gamma' \in \mathcal{D}'$ имеют конечные множества вершин U, U' и непересекающиеся множества ребер W, W'. Тогда сеть $\Gamma^* \cup \Gamma'$ (рис. 2), полученная склеиванием сетей Γ^*, Γ' в единственной вершине z, также принадлежит классу $\mathcal{D}$.

Вероятность работоспособности P_Γ между вершинами сети $\Gamma = \Gamma^* \cup \Gamma'$ определяется следующим соотношением

$$P_\Gamma = P_{\Gamma^* \cup \Gamma'} = \begin{cases} P_{\Gamma^*}, \ u, v \in U^*, \\ P_{\Gamma'}, \ u, v \in U', \\ P_{\Gamma^*} P_{\Gamma'}, \ u \in U^*, \ u' \in U'. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь P_{Γ^*} вероятность работоспособности сети Γ^* между вершинами u, z, а $P_{\Gamma'}$ вероятность работоспособности сети Γ' между вершинами z, u'.

Утверждение 5. *Число арифметических операций необходимых для вычисления P_Γ с помощью рекурсивной формулы (10), определяется следующим образом*

$$\lim_{l(\Gamma) \to \infty} \frac{2\, n(P_\Gamma)}{l(\Gamma)(l(\Gamma) - 1)} = 1, \tag{11}$$

где $n(P_\Gamma)$ *– число арифметических операций, необходимых для вычисления* P_Γ *для всех пар вершин* (u, v), $u \neq v$, *а* $l(\Gamma)$ *– число вершин* Γ.

Таким образом при $l(\Gamma) \to \infty$ для вычисления вероятности работоспособности P_Γ в пересчете на одну пару вершин требуется одна операция.

На основе полученных результатов был проведен вычислительный эксперимент для образующей модели сети интернетовского типа, представляющей собой радиально-кольцевое соединение с шестью вершинами. Вероятности работоспособности ребер p_w данной сети были заданы в соответствии с условиями теоремы 1:

$p_{01} = 0.0471595$	$p_{02} = 0.0469944$	$p_{16} = 0.0173955$
$p_{03} = 0.0287418$	$p_{04} = 0.0499121$	$p_{56} = 0.00818179$
$p_{05} = 0.0135117$	$p_{06} = 0.00822811$	$p_{45} = 0.0004677$
$p_{12} = 0.0490761$	$p_{23} = 0.0340865$	$p_{34} = 0.0442866$

Целью эксперимента было установление точности и быстродействия построенного алгоритма вычисления вероятности работоспособности по сравнению с методом Монте-Карло (число реализаций по методу Монте-Карло составило 10^6).

В ходе проведения эксперимента были получены две матрицы значений вероятности работоспособности между соответствующими вершинами графа. Ниже приведена матрица относительной погрешности счета.

$$\|a_{i,j}\|_{i,j=0}^{6} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0.001920 & 0.010164 & 0.001425 & 0.000054 & 0.006827 & 0.008561 \\ 0.001920 & 0 & 0.003351 & 0.024627 & 0.004263 & 0.020932 & 0.001718 \\ 0.010164 & 0.003351 & 0 & 0.002467 & 0.003994 & 0.014226 & 0.010637 \\ 0.001425 & 0.024627 & 0.002467 & 0 & 0.004049 & 0.020647 & 0.010964 \\ 0.000054 & 0.004263 & 0.003994 & 0.004049 & 0 & 0.017331 & 0.003379 \\ 0.006827 & 0.020932 & 0.014226 & 0.020647 & 0.017331 & 0 & 0.011170 \\ 0.008561 & 0.001718 & 0.010637 & 0.010964 & 0.003379 & 0.011170 & 0 \end{array} \right\|.$$

Здесь $a_{i,j}$ – относительная погрешность вычисления вероятности работоспособности между вершинами i, j. Как видно из приведенных результатов относительная погрешность не превысила 2.5%. В свою очередь, время счета на одном и том же оборудовании составило 14 часов для метода Монте-Карло и менее минуты для асимптотических соотношений.

Таким образом, определение характеристик надежности за счет описания множества всех путей, а не составления громоздких формул, не только упростило вычисления, но и сократило количество необходимых арифметических операций и время счета.

Аналогичный вычислительный эксперимент был проведен для сетей с высоконадежными элементами в условиях теоремы 2. Время счета было сокращено в несколько тысяч раз, а погрешность не превысила $2 - 3\%$.

В четвертой главе были построены алгоритмы, аналоги алгоритмов Дейкстра и Флойда. Аналог алгоритма Дейкстра был построен для вычисления длины псевдоминимального пути, пропускной способности псевдоминимального разреза и для поиска критических ребер в сетях с фиксированной начальной вершиной. В свою очередь, аналог алгоритма Флойда разработан для нахождения тех же параметров, но уже для всевозможных пар вершин, тем самым уменьшая количество арифметических операций в пересчете на одну пару вершин. Построен новый оптимальный алгоритм вычисления перечисленных параметров и нахождения соответствующих критических ребер для класса древовидных графов.

Приведем последний в качестве примера. Рассмотрим древовидное соединение Γ, множество вершин U которого можно представить в виде непересекающихся подмножеств $U_0, U_1, \ldots,\ U_m$, причем множество U_0 содержит единственную вершину u_0, называемую далее начальной.

Все ребра графа Γ представимы в виде $(u_i, u_j),\ 1 \le i < j \le m$, $u_i \in U_i,\ u_j \in U_j$, и любая его вершина достижима из начальной вершины u_0. Константы $\widetilde{D}(u), \widetilde{G}(u), D(u)$, для начальной вершины u_0 и конечной вершины u, будем понимать в том же смысле, что и $\widetilde{D}(\mathcal{R}), \widetilde{G}(\mathcal{L}), D(\mathcal{R})$.

Алгоритм определения $\widetilde{D}(u), \widetilde{G}(u), D(u)$.

Зададим $c(w) > 0, \quad w \in W$, положим $\widetilde{D}(u) = \widetilde{G}(u) = D(u) = c(u_0, u)$, $r_u = (u_0, u)$, $u \in U_1$.

Шаг 1. Определим множества $S(u) = \{v :\ (v, u) \in W, v \in U_{k-1}, u \in U_k\}$, $1 \le k \le m$.

Шаг 2. Вычислим $\widetilde{D}(u)$, $\widetilde{G}(u)$, $D(u)$ для $u \in U_k$, $1 \le k \le m$, по формулам:

$$\widetilde{D}(u) = \min_{v \in S(u)} \max(c(v,u), \widetilde{D}(v)),\ \widetilde{G}(u) = \max_{v \in S(u)} \min(c(v,u), \widetilde{G}(v)), \tag{12}$$

$$D(u) = \min_{v \in S(u)} (c(v,u) + D(v)). \tag{13}$$

В свою очередь, критические ребра для параметра $\widetilde{D}(u)$ определим из соотношения

$$r_u = \begin{cases} r_v, \text{ если } \widetilde{D}(u) = \max(\widetilde{D}(v), c(v,u)) > c(v,u), \\ (v,u), \text{ если } \widetilde{D}(u) = \max(\widetilde{D}(v), c(v,u)) > \widetilde{D}(v), \end{cases} \tag{14}$$

а критические ребра параметра $\widetilde{G}(u)$ из соотношения

$$r_u = \begin{cases} r_v, \text{ если } \widetilde{G}(u) = \min(\widetilde{G}(v), c(v,u)) < c(v,u), \\ (v,u), \text{ если } \widetilde{G}(u) = \min(\widetilde{G}(v), c(v,u)) < \widetilde{G}(v). \end{cases} \tag{15}$$

Замечание 2. *Если при фиксированной вершине* $u \in U$ *искать с помощью алгоритма только* $\widetilde{D}(u)$, $\widetilde{G}(u)$, $D(u)$, *то попутно находятся значения* $\widetilde{D}(v)$, $\widetilde{G}(v)$, $D(v)$ *для всех вершин* v, *из которых вершина* u *достижима.*

Из формул (12), (13) следует, что для вычисления каждого из значений $\widetilde{D}(u)$, $\widetilde{G}(u)$, $D(u)$, $u \in U$, требуется $2N(S(u)) - 1$ арифметических операций, причем это число нельзя уменьшить, т.е. алгоритм является оптимальным.

Основные результаты работы

1. Получены асимптотические соотношения для вероятности и логарифма вероятности работоспособности или отказа сетей при различных условиях, накладываемых на вероятность работоспособности или отказа их элементов.
2. Для асимптотик Вейбулловского и Гомпертцовского типа получена оценка относительной погрешности вероятности и логарифма вероятности работоспособности сети и построены алгоритмы определения узких мест, надежность которых существенно влияет на надежность всей сети.
3. Построены классы рекурсивно определимых сетей на основе радиально-кольцевых соединений и двухполюсников общего вида. Для ряда сетей специального вида и для классов рекурсивно определимых сетей получены алгоритмы вычисления их надежности.
4. Разработаны аналоги известных алгоритмов Дейкстра и Флойда для поиска узких мест и вычисления параметров асимптотических соотношений. Построен новый оптимальный алгоритм поиска минимальной и псевдоминимальной длины пути, псевдоминимальной пропускной способности разреза для класса древовидных соединений.
5. Проведены вычислительные эксперименты по определению надежности сети интернетовского типа и моделей времени жизни. Показано, что полученные асимптотические формулы для изучения случайных сетей существенно сокращают количество арифметических операций и время счета.

Публикации по теме диссертации

1. *Лосев, А.С.* Поиск слабого звена в графе со случайными ребрами / А.С. Лосев // Тезисы докладов. Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по математическому моделированию. Владивосток: Дальнаука. - 2007. - С. 47–48.
2. *Лосев, А.С.* Поиск узких мест в графе со случайными ребрами / А.С. Лосев // Тезисы докладов. XXXII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова. Владивосток: Изд-во Дальнаука. - 2007. - С. 26–27.
3. *Цициашвили, Г.Ш.* Узкие места в логической системе с ненадежными элементами / Г.Ш. Цициашвили, А.С. Лосев // Обозрение прикладной и промышленной математики. - 2007. - Т. 14. - Вып. 5. - С. 950–951.
4. *Tsitsiashvili, G.Sh.* Fast algorithms of asymptotic analysis of networks with unreliabe edges / G.Sh. Tsitsiashvili, A.S. Losev // Reliability and Risk Analysis: Theory & Application. - 2008. - Vol.1. - № 1. - P. 58–63.

5. *Лосев, А.С.* Асимптотический анализ надежности стохастических сетей / А.С. Лосев // Информатика и системы управления. - 2008. - №4(18). - С. 101–105.
6. *Лосев, А.С.* Пропускная способность в рекурсивно определимых двухполюсниках (на примере мостиковой схемы) / А.С. Лосев // Тезисы докладов. XXXIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова. – Владивосток: Изд-во Дальнаука. - 2008. - С. 79–80.
7. *Лосев, А.С.* Асимптотический анализ мостиковых структур с ненадежными элементами / А.С. Лосев // Наука и технологиии. Труды XXXVIII Российской школы. – М.:РАН. - 2008. - Т.2. - С. 85–92.
8. *Цициашвили, Г.Ш.* Применение алгоритма Флойда к асимптотическому анализу сетей с ненадежными ребрами / Г.Ш. Цициашвили, А.С. Лосев // Автоматика и телемеханика. - 2008. - Вып. 7. - С. 181–184.
9. *Tsitsiashvili, G.Sh.* An asymptotic analysis of a reliability of internet type networks / G.Sh. Tsitsiashvili, A.S. Losev // Reliability and Risk Analysis: Theory & Application. - 2009. - Vol. 2. - № 3. - P. 25–29.
10. *Tsitsiashvili, G.Sh.* An accuracy of asymptotic formulas in calculations of a random network reliability / G.Sh. Tsitsiashvili, A.S. Losev // Reliability and Risk Analysis: Theory & Application. - 2009. - Vol. 2. - № 3. - P. 58–63.
11. *Tsitsiashvili, G.Sh.* Asymptotic Analysis of Disconnection Probabilities in Random Networks with High Reliable Arcs / G.Sh. Tsitsiashvili, A.S. Losev // Proceedings of the 9th International Conference "Reliability and Statistics in Transportation and Communication" , Riga, Latvia. - 2009. - P. 97–101.
12. *Лосев, А.С.* Погрешность асимптотических формул в моделях времени жизни / А.С. Лосев // Тезисы докладов XXXIV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова "Фундаментальные проблемы математики и информационных наук". – Хабаровск: Изд-во ТОГУ. - 2009. - С. 100.
13. *Лосев, А.С.* Численные исследования асимптотических формул для надежности монотонных структур / А.С. Лосев // Наука и технологии. Краткие сообщения XXIX Российской школы, посвященной 85-летию со дня рождения академика В.П. Макеева. - Екатеринбург: УрО РАН. - 2009. - С. 207–209.
14. *Лосев, А.С.* Асимптотические формулы надежности сети / А.С. Лосев // Наука и технологии. Итоги диссертационных исследований. Избранные труды Российской школы. - М.:РАН. - 2009. - Т. 1. - С. 351–359.
15. *Лосев, А.С.* Асимптотические формулы надежности сетей интернетовского типа / А.С. Лосев // Дальневосточная конференция студентов,

аспирантов и молодых ученых по теоретической и прикладной математике: материалы конференции. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та. - 2009. - С. 59.
16. *Tsitsiashvili, G. Sh.* Calculation of connectivity probability in recursively defined random networks / G.Sh. Tsitsiashvili, A.S. Losev // Reliability: Theory and Applications. - 2010. - Vol. 1(16). - № 1. - P. 40–46.
17. *Лосев, А.С.* Вычисление вероятности связности рекурсивно определимых случайных сетей / А.С. Лосев, Г.Ш. Цициашвили // Дальневосточный математический журнал. - 2010. - Т. 1. - № 1. - С. 60–66.
18. *Лосев, А.С.* Вычисление вероятности работоспособности случайных сетей / А.С. Лосев // Сборник докладов. XXXV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова. -Владивосток: ИАПУ ДВО РАН. - 2010. - С. 298-301.

Личный вклад. Все основные результаты, представленные в диссертационной работе и публикациях, получены автором самостоятельно.

В работах, выполненных в соавторстве [3,4,8-11,16,17] автор внес следующий вклад: участие в построении и выборе рассматриваемых моделей, построение и тестирование вычислительных алгоритмов, проведение практического обоснования и прикладной интерпретации полученных результатов.

Лосев Александр Сергеевич

Быстрые алгоритмы вычисления надежности случайных сетей

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
05.13.18 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Подписно в печать 14.10.10. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 1.75
Тираж 100 экз. Заказ 127.
Издательство УГПИ. 692508, г. Уссурийск, ул. Некрасова, 25.

Отпечатано типографией Уссурийского государственного
педагогического института
692508, г. Уссурийск, ул. Некрасова, 25.