

На правах рукописи

ПОТЯНИХИН Дмитрий Андреевич

**ПЛОСКИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Владивосток – 2010

Работа выполнена в Институте автоматике и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент РАН
Буренин Анатолий Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Россихин Юрий Алексеевич

доктор технических наук,
профессор Сыгуров Петр Николаевич

Ведущая организация: Сибирский государственный аэрокосмический
университет имени академика М.Ф. Решетнева,
г. Красноярск

Защита состоится «23» ноября 2010 г. в 9³⁰ часов на заседании диссертационного совета ДМ005.007.02 в Институте автоматике и процессов управления ДВО РАН по адресу: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5, аудитория 510.
E-mail: dm00500702@iacp.dvo.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института автоматике и процессов управления ДВО РАН

Автореферат разослан «22» октября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук



О.В. Дудко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Автомодельные задачи с математической точки зрения оказываются простейшими среди существенно нестационарных задач динамики сплошных сред, поэтому, как правило, именно они в первую очередь получают свое решение. В газовой динамике такие решения достаточно давно стали достоянием учебников. Динамика деформирования твердых тел обратилась к таким задачам существенно позже. Это обусловлено двумя основными причинами. Первая из них заключается в том, что механика деформируемых твердых тел долгое время развивалась в качестве линейной теории, в отличие от газовой динамики, в которой изначально за основу была взята нелинейная математическая модель. Вторая и главная причина заключается в том, что в деформируемых средах наряду с деформациями изменения объема необходимо возникают и распространяются по среде деформации изменения формы. При учете в динамике таких сред их нелинейных свойств оказалось, что процессы распространения деформаций изменения объема и формы неразделимы, и взаимодействие их является качественным нелинейным эффектом, влияющим уже на постановочную часть динамических задач. Тогда как в газовой динамике целый ряд постановочных вопросов решает теорема Цемплена о возникновении только ударных волн сжатия и невозможности существования поверхностей разрывов при растяжении (подобные следствия дают и условия эволюционности разрывов, и условия существования их структуры), в динамике деформирования твердых тел такого однозначного ответа не существует. Более того, присутствует возможность получить различные решения одной и той же динамической автомодельной краевой задачи при разных комбинациях распространяющихся ударных и простых волн. Термодинамические ограничения (аналог теоремы Цемплена) в существовании различных ударных волн и ограничения, следующие из условий их эволюционности, в динамике деформируемых тел не имеют, в отличие от газовой динамики, ярко выраженного механического смысла. Поэтому их использование возможно только в процессе решения соответствующих задач, что и было сделано в настоящей диссертации. Ответ же на вопрос о способе распространения граничных возмущений по деформируемым телам важен не только для корректных постановок автомодельных задач, но и в общем случае. Все это и предопределяет **актуальность** проведенного исследования.

Целью работы является разработка и изучение алгоритма, позволяющего определять единственное решение плоских автомодельных задач динамики деформирования нелинейной упругой среды при помощи термодинамического условия совместности и условия эволюционности сильных разрывов.

К **основным научным результатам** диссертации относятся:

- постановки и решения новых краевых задач нелинейной динамической теории упругости;
- предложения алгоритмических приемов в выборе осуществляемого решения, следуя условиям эволюционности ударных волн и термодинамическим ограничениям на их существование;
- указание пороговых значений параметров соударения, при которых происходит перестройка в волновой картине распространяющихся деформаций;

– расчетные значения коэффициентов сухого трения и скоростей соударения, при которых осуществляется жесткая спайка соударяемых тел либо их проскальзывание.

Научная новизна результатов диссертации состоит в способе использования ограничений, следующих из условий эволюционности ударных волн и законов термодинамики.

Достоверность результатов диссертации основана на использовании классических методов механики сплошных сред и математической физики, известных численных методов, совпадении при предельном переходе с классическими линейными аналитическими решениями.

Практическая значимость. Современная инженерная практика в связи с усложнением технологических приемов нуждается не только в количественном, но и в качественном описании характера процесса деформирования. Особенно остро проблема понимания происходящих процессов стоит при изучении возникающих волновых поверхностей при динамическом импульсном деформировании технологических образцов, что обусловлено сложностью проведения экспериментов. В связи с этим полученные результаты диссертации могут найти практическое применение при постановке более сложных, неавтомодельных задач в качестве начальных приближений, а также при подготовке и проведении экспериментов в сейсмологии, нелинейной акустике, при испытании ответственных технологических узлов. Результаты исследования могут быть использованы при постановке опытов с нелинейными волнами в твердых телах и служить основой для вычисления упругих модулей конструкционных материалов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

– Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2006 – 2008, 2010);

– Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по математическому моделированию (Владивосток, 2003, 2004, 2007);

– региональная научно-техническая конференция «Молодежь и научно-технический прогресс» (Владивосток, 2004, 2007);

– Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по теоретической и прикладной математике (Владивосток, 2009);

– научно-техническая конференция «Вологдинские чтения» (Владивосток, 2006);

– Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2009);

– Всероссийская конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2010);

Диссертация в целом докладывалась на семинаре лаборатории механики деформируемого твердого тела ИАПУ ДВО РАН под руководством чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессора А.А. Буренина и на Дальневосточной математической школе-семинаре имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2010).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы (110 наименований). Общий объем работы – 106 страниц, в том числе 29 рисунков, включенных в текст.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение к работе содержит краткий обзор литературы, посвященной моделированию нестационарных волновых процессов в нелинейно упругих средах. Особое внимание уделено автомодельным решениям задач ударного деформирования. Отмечается вклад А.Г. Куликовского, Е.И. Свешниковой, А.П. Чугайновой, А.А. Буренина, Г.И. Быковцева, А.Д. Чернышова, П.Н. Сыгурова, Т.Р. Блейка, Дж. Ф. Уилсона, В.В. Лапыгина, И.Е. Агапова, В.А. Баскакова, Вервейко Н.Д., А.В. Резунова, А.В. Колокольчикова, Е.М. Черных, О.В. Дудко, А.А. Манцыборы в решение автомодельных задач теории упругости и теории упругопластичности. Отталкиваясь от представленных в литературном обзоре результатов, формулируются цель и задачи предпринимаемого исследования. Здесь же представлена структура диссертации по главам.

Первая глава диссертации носит вводный характер и содержит теоретические сведения, необходимые для моделирования нестационарных процессов в твердых телах. В § 1.1 приведены основные соотношения математической модели адиабатически деформируемой сжимаемой нелинейно упругой среды:

$$v_i = \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, \quad w_i = \dot{v}_i + v_j v_{i,j}, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}, \quad \sigma_{ij,j} = \rho w_i, \\ \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1 I_2 - \frac{8}{3}I_3}, \quad (1)$$

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \kappa I_1 I_2 + \chi I_1^3 + \eta I_3 + \dots, \quad I_1 = \alpha_{kk}, \quad I_2 = \alpha_{jk} \alpha_{kj}, \quad I_3 = \alpha_{jk} \alpha_{ks} \alpha_{sj}.$$

В соотношениях (1) u_i , v_i , w_i – компоненты векторов перемещений, скоростей и ускорений точек среды; α_{ij} , σ_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси и тензора напряжений Эйлера-Коши; ρ_0 , ρ – плотность материала в начальном и текущем состоянии соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера. Упругий потенциал изотропной среды W определяется инвариантами тензора деформаций I_1 , I_2 , I_3 ; λ , μ , κ , χ , η – упругие модули (λ и μ – параметры Ламе). Латинский индекс после запятой обозначает частное дифференцирование по пространственной координате ($m_{,j} = \partial m / \partial x_j$), точкой обозначена частная производная по времени ($\dot{m} = \partial m / \partial t$). Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам. Система (1) определяет движение среды всюду, где входящие в нее функции непрерывны и дифференцируемы требуемое число раз.

В § 1.2 приводятся условия совместности разрывов на ударных волнах и волнах ускорений. На ударных волнах параметры напряженно-деформированного состояния и движения точек среды связаны динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов первого порядка:

$$[\sigma_{ij}] n_j = \rho^+ (v_j^+ n_j - G) [v_i], \quad [\dot{u}_i] = -G [u_{i,j}] n_j \quad \text{при} \quad [u_i] = 0. \quad (2)$$

На поверхностях разрывов ускорений необходимо потребовать выполнения условий совместности разрывов второго порядка:

$$[\sigma_{ij,j}] = \rho^+ [w_i], \quad [\dot{u}_i] = G^2 [u_{i,jk}] n_j n_k \quad \text{при} \quad [u_i] = 0, \quad [u_{i,j}] = 0. \quad (3)$$

В условиях (2), (3) квадратными скобками обозначен скачок функции на поверхности: $[m] = m^+ - m^-$, m^+ – предельное значение функции m перед поверхностью разрывов, m^- – за поверхностью, n_j – компоненты единичной нормали к поверхности волны, G – скорость распространения соответствующей поверхности разрывов.

При отсутствии теплопроводности (адиабатическое приближение) единственным необратимым процессом в среде остается ударная волна. Условие неубывания энтропии на поверхности сильных разрывов приводит к термодинамическому условию совместности:

$$\sigma_{ij}^+ [v_i] n_j - \rho^+ (v_j^+ n_j - G) \left(\frac{[v_i][v_i]}{2} + \frac{W}{\rho_0} \right) \geq 0. \quad (4)$$

Аналогом соотношения (4) в газовой динамике является теорема Цемплена, запрещающая существование ударных волн разрежения.

В § 1.3 записаны модельные соотношения упруго деформируемого твердого тела в предположении плоского деформированного состояния. Анализируя модельные соотношения (1) совместно с условиями (2), (3), можно показать, что в нелинейно упругой среде с принятым выше потенциалом W в условиях плоского деформированного состояния возможно существование двух типов плоских ударных волн – квазипродольных, на которых преобладает изменение объемных деформаций, и квазипоперечных, вызывающих преимущественно сдвиговые деформации, а также волн Римана, передним и задним фронтами которых являются плоские волны разрывов ускорений. При этом скорость распространения объемных деформаций всегда больше, чем скорость распространения дополнительного сдвига.

Во *второй главе* диссертации приведены решения плоских автомодельных задач о косом отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от границы упругого полупространства. В § 2.1 граница полупространства полагается жестко закрепленной, § 2.2 – свободной.

Рассмотрим последовательность решения плоских автомодельных задач на примере задачи о косом отражении продольной ударной волны от жесткой преграды. Пусть плоская ударная волна Σ_1 постоянной интенсивности $\tau_1 = [u_{i,j}] n_i^{(1)} n_j^{(1)}$ ($n_i^{(1)}$ – компоненты единичной нормали к Σ_1), распространяясь в недеформированной среде с постоянной скоростью G_1 , падает под некоторым углом $\beta_1 < 90^\circ$ на плоскую жестко закрепленную границу L нелинейно упругого полупространства (рис. 1).

Прямоугольная декартова система координат выбирается таким образом, чтобы вектор нормали $\bar{n}^{(1)}$ к плоскости волны имел только две ненулевые компоненты: $n_1^{(1)} \neq 0$, $n_2^{(1)} \neq 0$, $n_3^{(1)} = 0$. В этом случае вектор перемещений точек среды с компонентами $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $u_3 = 0$ будет параллелен координатной плоскости Ox_1x_2 . Если описывать распространение ударной волны в подвижной системе координат, движущейся поступательно с постоянной скоростью $S = G_1 / \sin \beta_1$ параллельно оси Ox_2 , то в предположении постоянства интенсивности разрывов на волне Σ_1 движение упругой среды автомодельно.

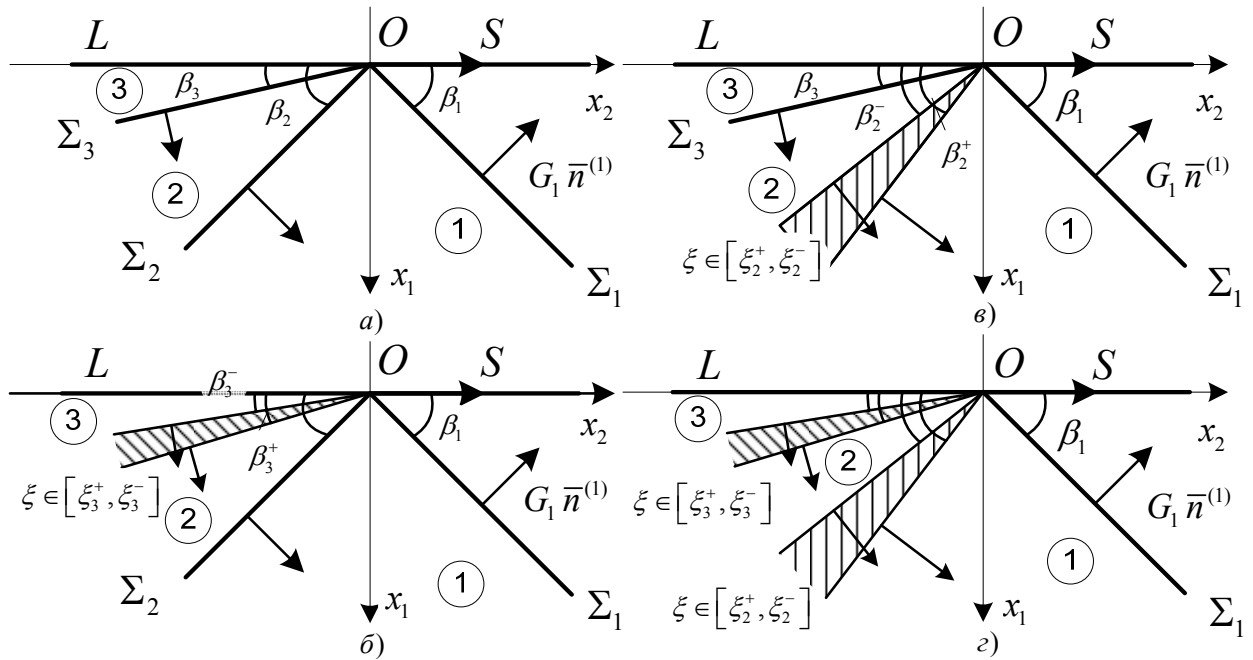


Рис. 1. Математически возможные волновые картины взаимодействия плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности с жестко закрепленной границей упругого полупространства

Представим ненулевые компоненты вектора перемещений в виде $u_1 = x_1 \cdot F(\xi)$, $u_2 = x_1 \cdot \Phi(\xi)$, где $\xi = (x_2 - St)/x_1$ – автомодельная переменная, $F(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ – первая и вторая компоненты безразмерного вектора перемещений в координатном пространстве ξ . Тогда в системе определяющих соотношений (1) можно перейти от дифференциальных уравнений в частных производных к однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $F(\xi)$ и $\Phi(\xi)$:

$$\begin{cases} AF''(\xi) + B\Phi''(\xi) = 0, \\ CF''(\xi) + D\Phi''(\xi) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где A, B, C, D – функции от ξ , F, F', Φ, Φ' и упругих модулей среды.

Условие существования нетривиального решения системы (5)

$$AD - BC = 0 \quad (6)$$

может выполняться либо при некотором значении $\xi = \xi^*$ (что соответствует ударной волне), либо в целом интервале $\xi \in [\xi^+, \xi^-]$ (ξ^+ и ξ^- определяют положение двух слабых волн разрывов ускорений, которые являются передним и задним фронтами волны Римана). В областях тривиального решения ненулевые параметры могут быть выражены через произвольные константы интегрирования a, b, e, f системы (5):

$$\begin{aligned} F(\xi) &= a\xi + b, & \Phi(\xi) &= e\xi + f, \\ u_{1,1} &= b, & u_{1,2} &= a, & u_{2,1} &= f, & u_{2,2} &= e, \\ v_1 &= \frac{-Sa}{(1-b)(1-e)-af}, & v_2 &= \frac{-S(e-be+af)}{(1-b)(1-e)-af}, & \frac{\rho}{\rho_0} &= (1-b)(1-e)-af, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha_{11} = b - \frac{1}{2}(b^2 + f^2), \quad \alpha_{12} = \frac{1}{2}(a + f - ab - ef), \quad \alpha_{22} = e - \frac{1}{2}(a^2 + e^2).$$

Компоненты тензора напряжений не приводим из-за их очевидной громоздкости.

Условия совместности разрывов, записанные с использованием введенных автомодельных параметров процесса ударного деформирования, допускают существование в рамках поставленной задачи плоских ударных волн (квази-продольных и квазипоперечных) и простых волн (передним и задним фронтами которых являются плоские волны разрывов ускорений), а также областей постоянства параметров напряженно-деформированного состояния, каждой из которых соответствуют свои значения констант интегрирования a, b, e, f .

Волновая картина, возникающая в области, ограниченной плоскостями L и Σ_1 , с математической точки зрения может состоять из различных комбинаций плоских ударных волн и волн Римана. Характер возникающей волновой картины определяется задаваемыми значениями интенсивности τ_1 и угла падения β_1 волны Σ_1 .

В зоне 1 (рис. 1, а–г) параметры напряженно-деформированного состояния и движения точек среды определяются из условий совместности разрывов (2) на Σ_1 :

$$a_1 = f_1 = \tau_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1, \quad b_1 = -\tau_1 \cos^2 \beta_1, \quad e_1 = -\tau_1 \sin^2 \beta_1. \quad (8)$$

Здесь и далее нижний индекс у констант интегрирования a, b, e, f соответствует нумерации областей их постоянства на рис. 1. Передним отраженным фронтом оказывается либо квазипродольная ударная волна Σ_2 , положение которой определяется значением $\xi_2 = -\text{ctg} \beta_2$ (рис. 1, а, б), либо простая волна Римана $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$ (рис. 1, в, г), вносящие основной вклад в изменение объемных деформаций. Следом может распространяться либо квазипоперечная ударная волна Σ_3 , соответствующая значению $\xi_3 = -\text{ctg} \beta_3$ (рис. 1, в, г), либо центрированная волна $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$ (рис. 1, б, г), влияющие в основном на производимый сдвиг.

Решение краевой задачи в случае отражения двух ударных волновых фронтов Σ_2 и Σ_3 (рис. 1, а) заключается в определении значений ξ_2, ξ_3 и констант интегрирования a, b, e, f в областях 2 и 3 из замкнутой системы нелинейных алгебраических уравнений, включающей условия совместности разрывов (2) на ударных волнах Σ_2 и Σ_3 с учетом отсутствия движения точек среды на жестко закрепленной границе L .

Решение краевой задачи в случае отражения ударной волны Σ_2 и простой волны $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$ (рис. 1, б) состоит в определении положения ударного фронта ξ_2 , переднего и заднего фронтов ξ_3^+ и ξ_3^- , констант интегрирования a, b, e, f в областях 2 и 3, а также функций $F(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ в области волны Римана. Выполним вычисления в следующей последовательности.

Шаг 1. Следуя условиям совместности (2) на Σ_2 , получаем систему из четырех алгебраических уравнений относительно неизвестных $\xi_2, a_2, b_2, e_2, f_2$. Таким образом, в зоне 2 все параметры, определяющие движение среды, выражаются через один неизвестный параметр ξ_2 . Задавая его произвольно, выбрав

в качестве первого приближения решение в постановке с ударными волнами (рис. 1, а), находим a_2, b_2, e_2, f_2 .

Шаг 2. Подставляя в условие (6) параметры движения в зоне 2, находим ξ_3^+ .

Шаг 3. Решение в области простой волны строится путем интегрирования по автомодельному параметру ξ системы обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящей из условия (6) и одного из равенств (5):

$$\begin{cases} AF''(\xi) + B\Phi''(\xi) = 0, \\ AD - BC = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для численного интегрирования системы (9) предлагается использовать неявную конечно-разностную схему с трехточечным шаблоном $\{\xi_{(i-1)}, \xi_{(i)}, \xi_{(i+1)}\}$ с постоянным шагом h . Разобьем отрезок $[\xi_3^+, \xi_3^-]$ на n равных частей точками $\xi_3^+ = \xi_{(0)} > \xi_{(1)} > \dots > \xi_{(n)} = \xi_3^-$. Тогда $F_{(i)} = F(\xi_{(i)})$ и $\Phi_{(i)} = \Phi(\xi_{(i)})$ – значения функций $F(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ в точках деления.

Производные функций $F(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ во внутренних узлах ($1 \leq i \leq n-1$) аппроксимируются конечно-разностными формулами

$$\begin{aligned} F'_{(i)} &= (F_{(i+1)} - F_{(i-1)})/(2h), & F''_{(i)} &= (F_{(i+1)} - 2F_{(i)} + F_{(i-1)})/h^2, \\ \Phi'_{(i)} &= (\Phi_{(i+1)} - \Phi_{(i-1)})/(2h), & \Phi''_{(i)} &= (\Phi_{(i+1)} - 2\Phi_{(i)} + \Phi_{(i-1)})/h^2. \end{aligned} \quad (10)$$

В граничных узлах используем представление

$$\begin{aligned} F'_{(0)} &= (-3F_{(0)} + 4F_{(1)} - F_{(2)})/(2h), & \Phi'_{(0)} &= (-3\Phi_{(0)} + 4\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)})/(2h), \\ F'_{(n)} &= (3F_{(n)} - 4F_{(n-1)} + F_{(n-2)})/(2h), & \Phi'_{(n)} &= (3\Phi_{(n)} - 4\Phi_{(n-1)} + \Phi_{(n-2)})/(2h). \end{aligned} \quad (11)$$

В первом узле $\xi_{(0)} = \xi_3^+$ (на переднем фронте простой волны) $F_{(0)} = a_2\xi_3^+ + b_2$, $\Phi_{(0)} = e_2\xi_3^+ + f_2$, $F'_{(0)} = a_2$, $\Phi'_{(0)} = e_2$. В каждом внутреннем узле $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)}$ требуется записать два дифференциальных уравнения (9), заменяя производные по формулам (10). Таким образом, получается замкнутая система уравнений относительно неизвестных $F_{(i)}, \Phi_{(i)}$ ($0 \leq i \leq n$). Решив ее, вычисляем производные $F'_{(n)}, \Phi'_{(n)}$ согласно (11).

Шаг 4. Решение краевой задачи заканчиваем, если $F'_{(n)} = \Phi'_{(n)} = 0$ (следствие отсутствия движения точек среды на закрепленной границе L). Заметим, что условие остановки счета при решении другой краевой задачи будет отличаться от указанного. В противном случае, корректируя значения положения ударной волны ξ_2 , шага интегрирования h и количество отрезков разбиения n , добиваемся выполнения на заднем фронте ξ_3^- простой волны условия $F'_{(n)} = \Phi'_{(n)} = 0$. Константы интегрирования a, b, e, f в области 3 находим из соотношений $F_{(n)} = a_3\xi_3^- + b_3$, $\Phi_{(n)} = e_3\xi_3^- + f_3$, $F'_{(n)} = a_3$, $\Phi'_{(n)} = e_3$.

Решение краевой задачи в случае отражения простой волны $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$ и ударной волны Σ_3 (рис. 1, в) и в случае отражения двух волн Римана $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$ и $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$ (рис. 1, г) строится аналогично. Решение задачи в по-

становке с двумя отраженными ударными волнами (рис. 1, а) можно получить всегда, в то время как остальные решения (рис. 1, б, в, г) при определенных параметрах задачи не существуют.

Шаг 5. Получив все математически возможные решения краевой задачи (в общем случае четыре), сравниваем их между собой. На каждой ударной волне проверяем выполнение термодинамического условия совместности (4). Если соотношение (4) не выполняется при некоторой постановке, то такую постановку исключаем из числа возможных. Еще одним ограничением на существование ударных волн является условие эволюционности. Если в результате сопоставления двух решений оказывается, что фронт ударной волны занимает промежуточное положение внутри веера простой волны, то считаем ударную волну неэволюционной, и выбираем решение с волной Римана.

Серия вычислительных экспериментов проводилась для нелинейной упругой среды с различными упругими модулями; значения параметров падающей волны варьировались в интервалах $0 \leq \beta_1 \leq 80^\circ$, $0,001 \leq \tau_1 \leq 0,03$. Оказалось, что квазипоперечная ударная волна Σ_3 всегда оказывается внутри веера центрированной волны $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$ (рис. 1, б, г), т.е. волновые картины, показанные на рис. 1, а, в, не возникают. Построены графики зависимостей параметров напряженно-деформированного состояния от параметров падающей волны β_1, τ_1 .

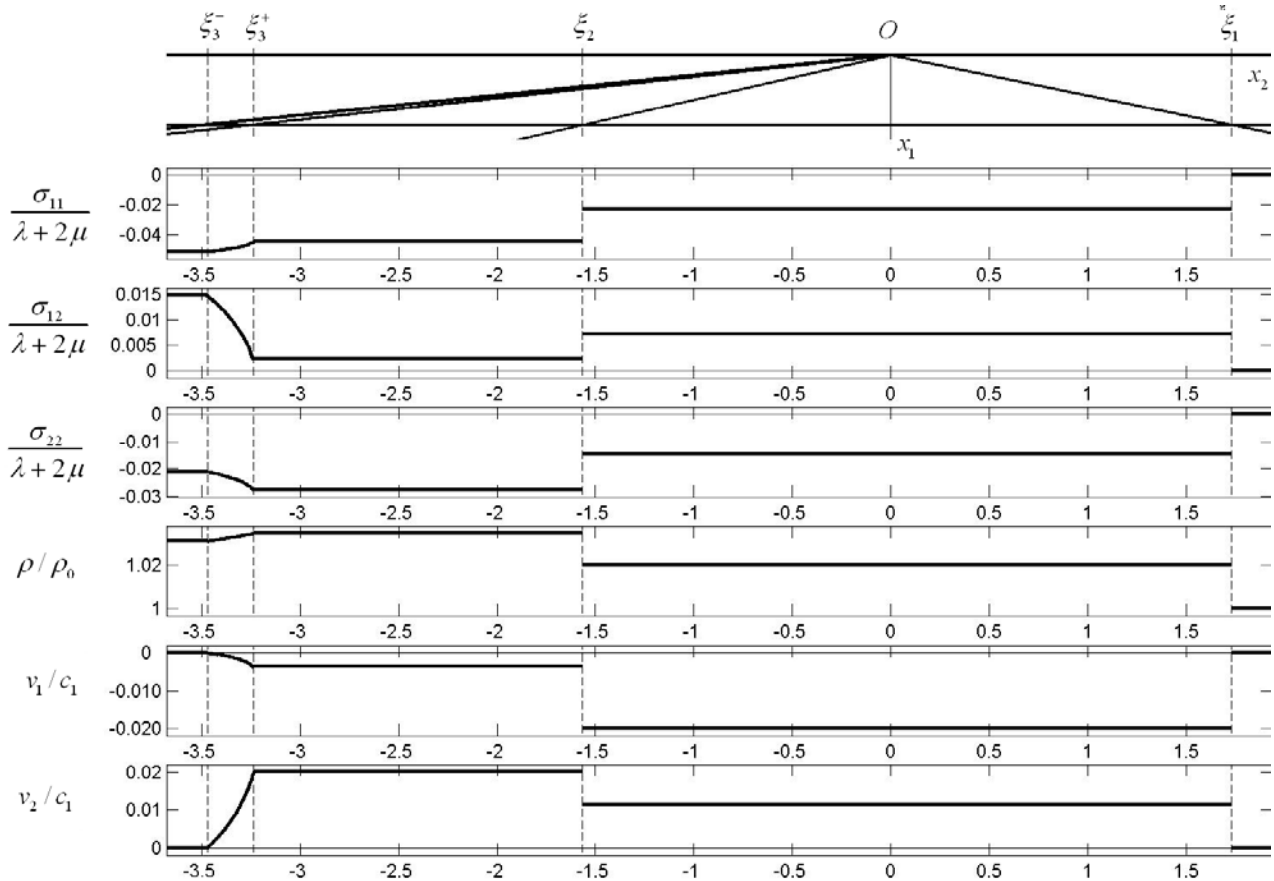


Рис. 2. Распределение параметров напряженно-деформированного состояния, соответствующее волновой картине с отраженными квазипродольной ударной волной Σ_2 и центрированной волной $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$ ($\beta_1 = 30^\circ$, $\tau_1 = 0,02$)

Распределение параметров напряженно-деформированного состояния, типичное для волновой картины с отраженной квазипродольной ударной волной Σ_2 и центрированной волной $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$ (рис.1, б), получено при $\beta_1 = 30^\circ$,

$\tau_1 = 0,02$ и показано на рис. 2. В качестве исходных данных были выбраны нормированные упругие модули $\lambda/(\lambda + 2\mu) = 0.4$, $\mu/(\lambda + 2\mu) = 0.3$, $\kappa/(\lambda + 2\mu) = -1.0$, $\chi/(\lambda + 2\mu) = -1.5$, $\eta/(\lambda + 2\mu) = -2.0$. На графиках напряжения отнесены к $(\lambda + 2\mu)$, скорости – к $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0}$. На квазипродольной ударной волне Σ_2 происходит скачок уплотнения, на простой волне $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$ уровень объемных деформаций уменьшается.

При малых значениях угла падения β_1 реализуется волновая картина, представленная на рис. 1, б. Существует некоторое критическое значение угла падения β_1^* , при превышении которого квазипродольная ударная волна Σ_2 оказывается внутри веера простой волны, т.е. реализуется волновая картина с двумя простыми волнами (рис. 1, г). Это критическое значение зависит от упругих модулей и увеличивается с ростом интенсивности волны Σ_1 . Например, при указанных упругих модулях значению интенсивности $\tau_1 = 0,01$ соответствует угол $\beta_1^* \approx 64,54^\circ$, значению $\tau_1 = 0,02$ – угол $\beta_1^* \approx 65,70^\circ$. При дальнейшем увеличении угла падения наступает такой момент, когда постановка задачи в авто-модельной формулировке становится невозможной.

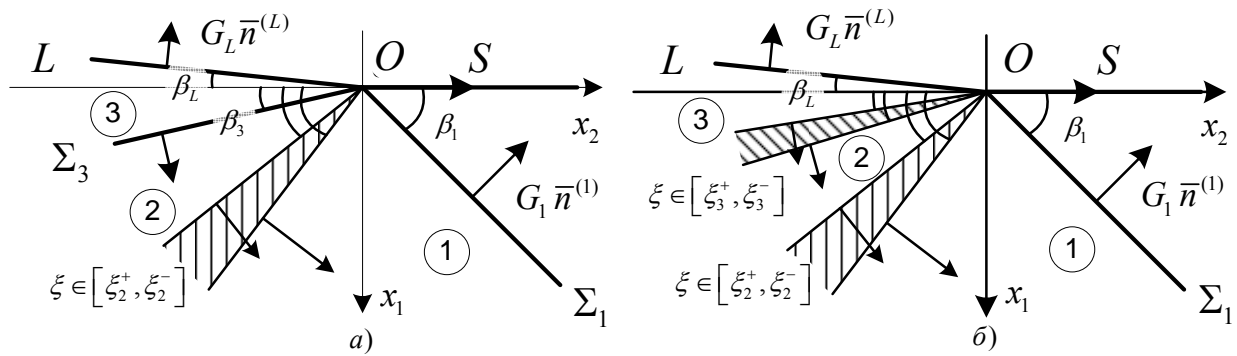


Рис. 3. Волновые картины взаимодействия плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности со свободной границей упругого полупространства

В § 2.2 приведено решение задачи плоской авто-модельной задачи о косом отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от свободной границы упругого полупространства (рис. 3). Так же, как в предыдущей задаче, с математической точки зрения возможны четыре различных варианта распространения деформаций (на рис. 3 указаны только реализуемые волновые картины). Задача решалась методом, описанным выше. Отличие заключается в граничных условиях, задаваемых на границе L : помимо отсутствия нормальных напряжений следует учитывать ее движение. Вычислительные эксперименты показывают, что первой отраженной волной является волна Римана. Следом за ней, в зависимости от параметров падающей волны Σ_1 и упругих модулей среды, может распространяться либо квазипоперечная ударная волна (рис. 3, а), либо волна Римана (рис. 3, б).

В *третьей главе* приведены решения задач о соударении тел с плоскими границами. В § 3.1 рассмотрено соударение абсолютно твердого и нелинейно упругого тел. Пусть неподвижное упругое тело I занимает полупространство $x_1 > 0$ (рис. 4). Его границу обозначим через L_1 . Абсолютно твердое тело II с плоской границей L_2 , двигаясь с постоянной скоростью $\bar{v}_0 = \{v_{10}, v_{20}\}$, сталкива-

ется с первым так, что появляется общая граница двух тел OL . На участке OL выполняется закон сухого трения, т.е. возможно как проскальзывание граничных плоскостей взаимодействующих тел, так и их жесткая сцепка.

Пусть скорость S движения точки O (начала подвижной системы координат вдоль оси Ox_2) достаточно большая, чтобы возникающие при столкновении волновые фронты не могли отделиться от точки O . В задачах о соударении удобно выбрать автомодельную переменную $\theta = x_1 / (St - x_2)$, т.е. обратную введенной ранее переменной ξ . Представление ненулевых компонент вектора перемещений в виде $u_1 = (St - x_2) \cdot F(\theta)$, $u_2 = (St - x_2) \cdot \Phi(\theta)$ позволяют преобразовать уравнение движения упругой среды к однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $F(\theta)$ и $\Phi(\theta)$, аналогичной системе (5). Решение задачи производится по описанному § 2.1 алгоритму и включает проверку термодинамического условия совместности и условия эволюционности для ударных волн.

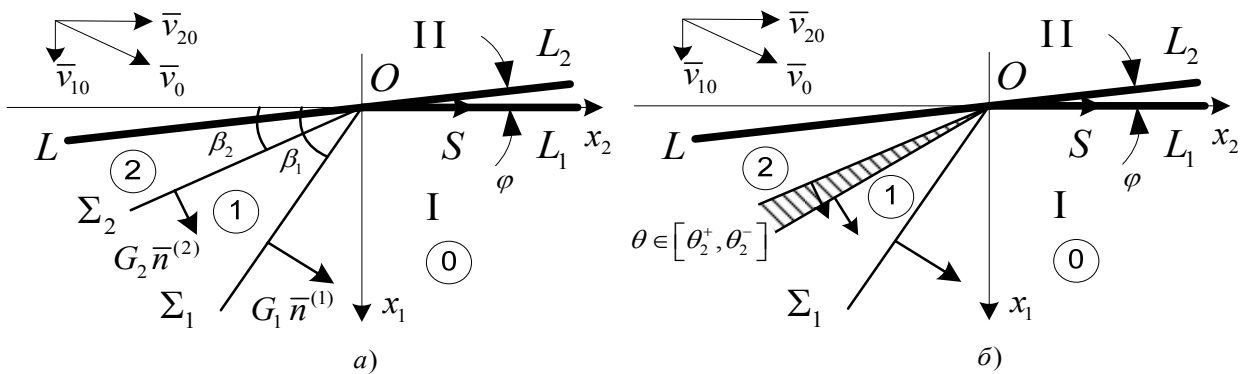


Рис. 4. Волновые картины в задаче о соударении абсолютно твердого и нелинейно упругого тел

Передним фронтом всегда оказывается продольная ударная волна Σ_1 , положение которой соответствует значению $\theta_1 = \text{tg } \beta_1$ (рис. 4, а, б). Следом за ней, в зависимости от параметров задачи и упругих модулей, может распространяться либо квазипоперечная ударная волна Σ_2 , отвечающая значению $\theta_2 = \text{tg } \beta_2$ (рис. 4, а), либо центрированная волна $\theta \in [\theta_2^+, \theta_2^-]$ (рис. 4, б).

Серия вычислительных экспериментов позволила изучить зависимость напряженно-деформированного состояния от скорости соударения $\bar{v}_0 = \{v_{10}, v_{20}\}$, угла соударения φ и коэффициента трения k на границе OL . При этом каждая волновая картина может соответствовать как жесткой сцепке двух тел, так и их проскальзыванию на границе OL .

В § 3.2 приведено решение еще одной задачи о соударении двух тел, но, в отличие от предыдущей, здесь оба тела полагаются нелинейно упругими. Механические свойства упругих тел в общем случае различны, им соответствуют различные значения упругих постоянных.

Выбирая автомодельную переменную как в § 3.1 и представляя компоненты вектора перемещений в виде $u_1 = (St - x_2) \cdot F(\theta) + g_1 t$, $u_2 = (St - x_2) \cdot \Phi(\theta) + g_2 t$ (для неподвижного тела $g_1 = g_2 = 0$, для ударяющего тела $g_1 = v_{10}$, $g_2 = v_{20}$), определяем допустимые комбинации волн, возникающие в соударяющихся телах (они представлены на рис. 5).

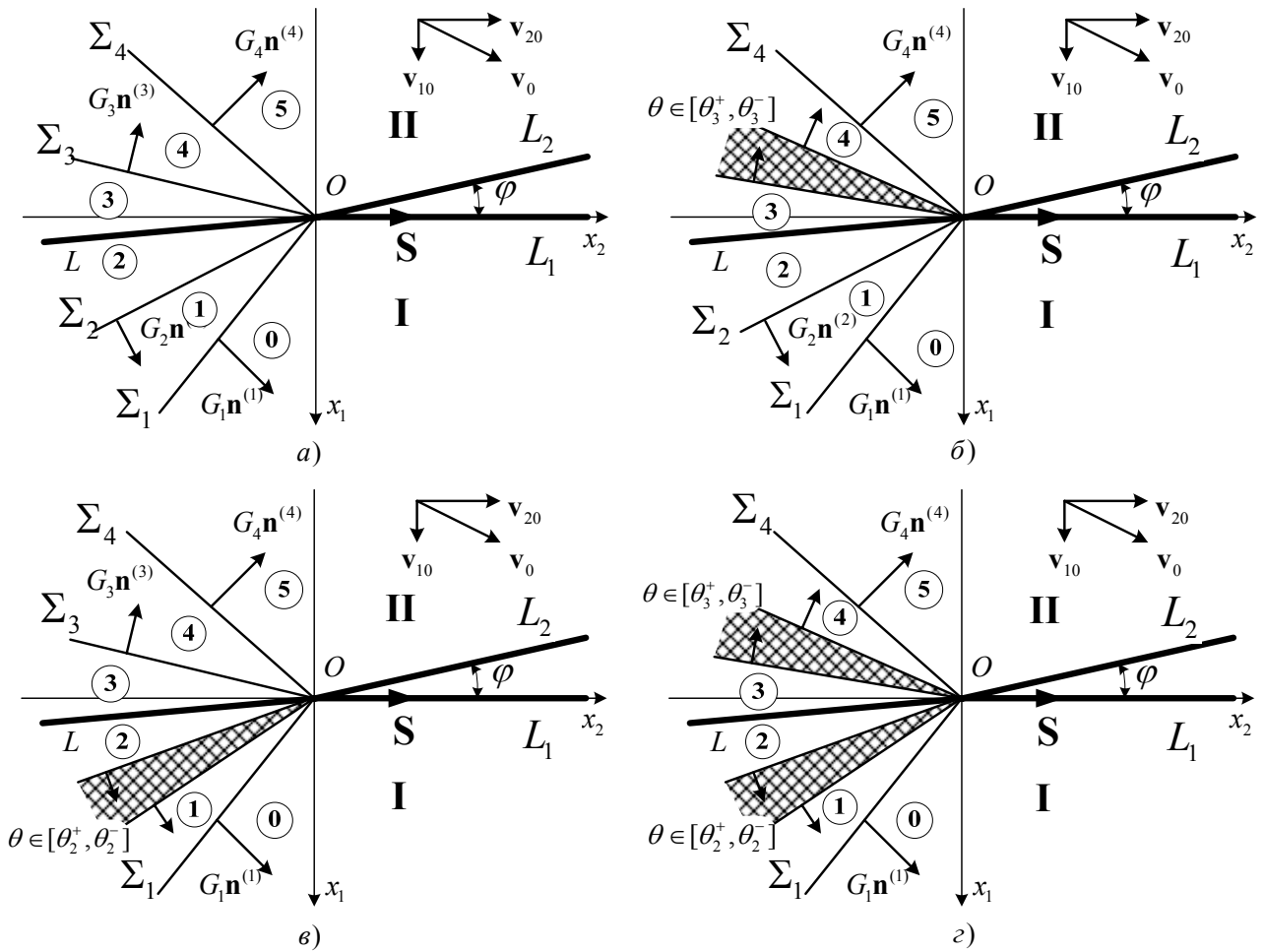


Рис. 5. Волновые картины в задаче о соударении двух нелинейно упругих тел

Как и в предыдущей задаче, построены графики зависимостей параметров напряженно-деформированного состояния в областях между волнами в соударяющихся телах от скорости соударения $\bar{v}_0 = \{v_{10}, v_{20}\}$, угла соударения φ и коэффициента трения k на границе OL .

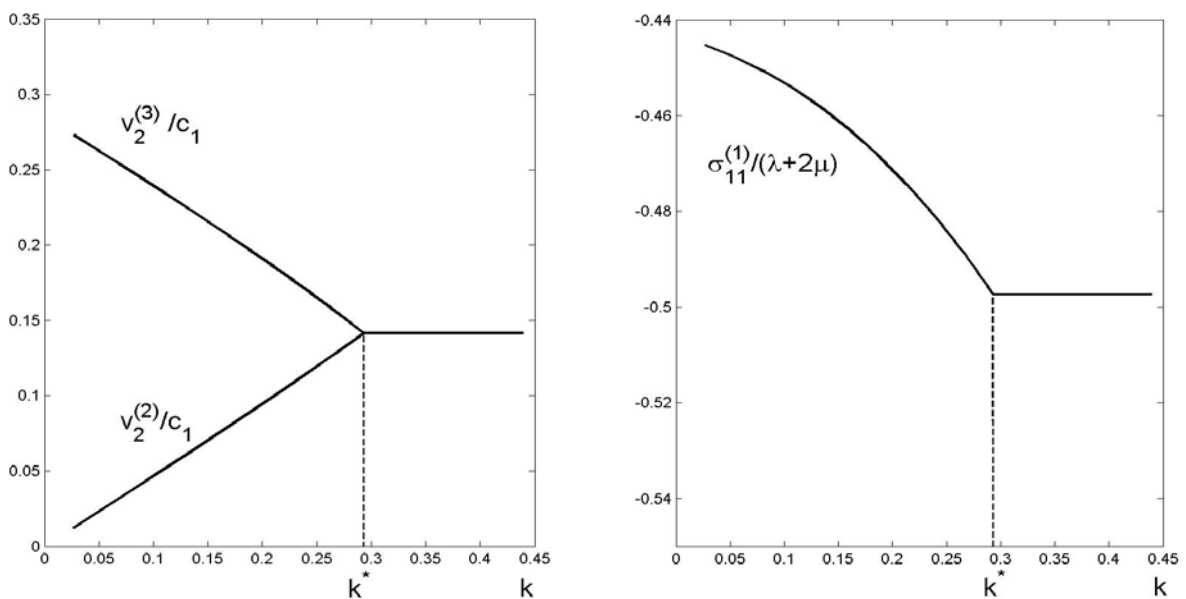


Рис. 6. Влияние коэффициента трения k на параметры напряженно-деформированного состояния

На рис. 6 показано изменение скоростей v_2 в зонах деформирования 2 и 3, а также компоненты σ_{11} тензора напряжений в зоне 1 в зависимости от коэффициента трения k . Для каждого фиксированного набора параметров v_{10} , v_{20} , φ и упругих модулей существует критическое значение коэффициента трения $k = k^*$, в котором графики функций имеют излом. При $k < k^*$ происходит скольжение граничных плоскостей соударяющихся тел, значение $k = k^*$ соответствует наступлению жесткого контакта. При построении графиков использовались параметры $v_{10} = 0,5c_1$, $v_{20} = 0,3c_1$, $\varphi = 1^\circ$; механические свойства соударяющихся тел выбраны одинаковыми. Интересно отметить, что при моделировании соударения двух упругих тел с одинаковыми механическими свойствами напряженно-деформированное состояние в них будет в общем случае различным.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Построен алгоритм решения плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости, позволяющий выбрать единственное решение из множества математически допустимых на основе критериев термодинамической совместности и эволюционности ударных волн. Проверка критериев производится непосредственно во время численных расчетов.

2. Получены численные решения автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости об отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от жестко закрепленной и свободной границ упругого полупространства, проведен их анализ.

3. Получены численные решения автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости о соударении абсолютно твердого и нелинейно упругого тел с плоскими границами, а также о соударении двух нелинейно упругих тел с плоскими границами, проведен их анализ. Отмечено существование пороговых значений для параметров задач, при которых изменяется характер взаимодействия тел на общей границе: либо происходит проскальзывание, либо жесткий контакт.

4. Установлена эквивалентность термодинамического условия совместности и условия эволюционности ударных волн в плоских автомодельных краевых задачах.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Дудко О.В., Потянихин Д.А. Автомодельная задача нелинейной динамической теории упругости о взаимодействии продольной ударной волны с жесткой преградой // Вычисл. мех. сплош. сред. 2008. Т. 1, № 2. С. 27-37.

2. Дудко О.В., Потянихин Д.А. О косом ударе жестким телом, имеющим плоскую границу, по нелинейному упругому полупространству // Изв. Саратовского государственного университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч.2. С. 32-40.

3. Потянихин Д.А. Косое отражение ударной волны от жесткой границы в нелинейной упругой среде // XXXII Дальневосточная математическая школа-

семинар имени академика Е.В. Золотова: тезисы докладов. Владивосток: Изд-во «Дальнаука», 2007. С. 146-147.

4. Дудко О.В., Потянихин Д.А. О решении автомодельных краевых задач динамики ударного деформирования упругих сред // XXXIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова: тезисы докладов. Владивосток: Изд-во «Дальнаука», 2008. С. 197.

5. Дудко О.В., Потянихин Д.А. О соударении абсолютно твердого и нелинейно упругого тел // Материалы XVI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009), 25–31 мая 2009 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. С.284–286.

6. Дудко О.В., Потянихин Д.А. Автомодельная задача о косом ударе жестким телом по нелинейному упругому полупространству // Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, 1 – 4 июня, 2009. Самара: СамГТУ. Ч. 1. С. 100–103.

7. Дудко О.В., Потянихин Д.А. Плоская автомодельная задача об ударе абсолютно твердым телом по упругому полупространству // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2009. Ч. 1. С. 156–158.

8. Потянихин Д.А. Задача о соударении двух упругих полупространств // Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по теоретической и прикладной математике: материалы конференции, Владивосток, 19-21 ноября 2009 г. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2009. С. 72.

9. Дудко О.В., Потянихин Д.А. Соударение двух упругих полупространств // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2010. С. 135–137.

10. Дудко О.В., Потянихин Д.А. Автомодельное отражение плоской ударной волны от свободной границы // Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике»: тезисы докладов. Новосибирск: ИГИЛ СО РАН, 2010. С. 102–103.

11. Потянихин Д.А. О критериях выбора единственного решения в автомодельных задачах динамики деформирования упругих тел // XXXV Дальневосточная Математическая Школа-Семинар имени академика Е.В. Золотова, 31 авг. – 5 сент. 2010 г., Владивосток: сб. докл. [Электронный ресурс]. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2010. С. 621–627.

12. Дудко О.В., Потянихин Д.А. Плоская автомодельная задача о соударении двух упругих тел. // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. С. 144–146.

Личный вклад автора. Работы [3, 8, 11] выполнены автором лично. В работах [1, 2, 4–7, 9, 10, 12] автор участвовал в постановке краевых задач и выполнил все необходимые вычисления.

ПОТЯНИХИН ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ

ПЛОСКИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Автореферат

Подписано к печати 20.10.2010. Усл. п. л. 0.8 Уч.-изд. л. 0.7

Формат 60x84/16. Тираж 100. Заказ 33.

Издано ИАПУ ДВО РАН. Владивосток, Радио, 5.

Отпечатано участком оперативной печати ИАПУ ДВО РАН
Владивосток, Радио, 5.